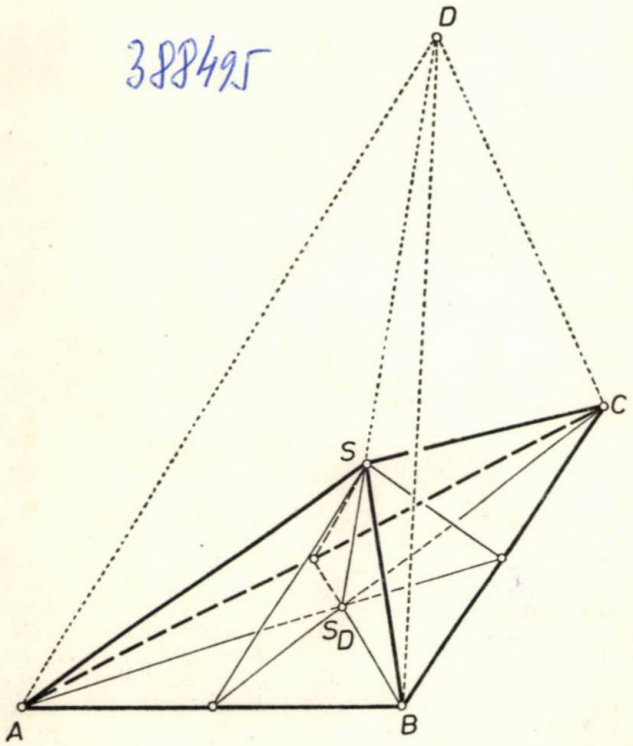
H. 1. 8.

# A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

388495




1988 . . . .

1987. XXXIV. évfolyam 2 szám

# A MATEMATIKA TANÍTÁSA

## A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY FATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-2055 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

**ISSN 0461—3902**

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
*a)* személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

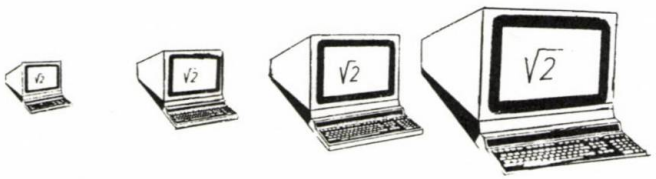
*Kallós Károly:* Pitagorasz tételének új bizonyítása ..... 33
*Bereznai Gyula:* A gyökvonás egy algoritmusáról ..... 35
*Számadó László:* Ábrázoló geometriai szerkesztésekből síkgeometriai állítások .... 37
*Dr. Darvasi Gyula:* A cikcakk-szorzástól az euklidészi algoritmusig ..... 42
*Simon László:* Fixpont-iteráció személyi számítógépen ..... 44
*Róka Sándor:* Egypercesek. Feladatok szakkörre ..... 53
FELADATOK ..... 61

СОДЕРЖАНИЕ

*Каллош Карой:* Новое доказательство теоремы Пифагора ..... 33
*Березнаи Дюла:* Об алгоритме извлечения корня ..... 35
*Самадо Ласло:* Планиметрические определения из построений начертательной геометрии ..... 37
*Д-р Дарваши Дюла:* От умножения зигзаг до алгоритма Эвклида ..... 42
*Шимон Ласло:* Итерация неподвижной точки на вычислительной машине ... 44
*Рока Шандор:* Минутные задачи на кружок ..... 53
ЗАДАЧИ ..... 61

INHALT

*Kallós, Károly:* Ein neuer Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes ..... 33
*Bereznai, Gyula:* Über einen Algorithmus des Wurzelziehens ..... 35
*Számadó, László:* Planimetrische Sätze aus den Konstruktionen der darstellenden Geometrie ..... 37
*Dr. Darvasi, Gyula:* Von der Zickzack-Multiplikation bis zum euklidischen Algorithmus ..... 42
*Simon, László:* Fixpunkt-Iteration an Personalcomputer ..... 44
*Róka, Sándor:* Einminutigen. Aufgaben für Fachzirkel ..... 53
AUFGABEN ..... 61




Legutóbbi alkalommal dr.Sárkány Ernő határozott felkérésünkre ismertette a többiekétől eltérő tevékenységét. Az alábbi írás "szabad akaratból" fogalmazódott meg: egy másik kisérletező mondja el észrevételeit, óhajait. A szerző a Budapesti Hunfalvy János Közgazdasági Szakközépiskola tanára, két éve vesz részt kisérletünkben, már előtte is próbálkozott hasonlóval. Számítástechnikából haladó szakkört tart évek óta. Írásában - kérésünkre - keverednek a múltbeli tények (az 1987/4. számbeli "Évvégi összegzés"-ben szerepeltek is) és a jövő vágyai.

Túri Zoltán:

## S z á m í t á s t e c h n i k a - o k t a t á s i  t e r v

Iskolánk - mint a középiskolák többsége - egyetlen osztályának tanulói sincsenek matematikai képességek szerint válogatva. Ezért a számítógéphez kapcsolt, illetve rá alapozott ismeretszerzés mennyiségét hiba általában túl nagyra tervezni. Ugyanis csak az osztály négyes, ötös tanulói jó részénél mutatható ki, hogy matematikai látókörük, és némiképp a tudásuk is nő a programozás tanulásának köszönhetően. A többieknél viszont a kieső idő inkább hátrányt jelent: több kárt szenved a matematika (gyakoroltatása), mint amennyi többletet a fogyatékos BASIC jelent.

Az ismeretterjesztés szintjén felüli számítástechnikai ismeretközlést, illetve alkalmazást csak azoknál a tanulóknál látom értelmes cselekedetnek, akiknek az agyában is rendelkezésre áll a szükséges "hardver és szoftver" (adottság és szorgalom).

Ez első félév után matematika szerinti csoportbontást kíván. Ilyen feltétel mellett látom célszerűnek a következő tervvázlaton alapuló, számítógépet alkalmazó matematika oktatást a II. félévtől.

### Az  e l s ő  osztályban tervezett munka vázlata

A gép és a BASIC nyelv megismerését a II. félévben egy tömbben, kb. két hetet rászánva, gyorsan kell elvégezni. Mindössze 10-20 kulcsszó, kalkulátor üzem - PRINT, =, INPUT, függvények - FOR és IF egyszerre, sok példával - vektorok, stb szerepel. A szükséges példaanyagot inkább ismétlő részekből veszem, hogy a matematikai újdonságok ne zavarják a tanulókat: teljesen a számítástechnikára figyelhessenek. Ez az intenzív tanterv lehetséges két hét alatt, ha jól koncentrálunk, és ha a szükséges ismereteket tartjuk szem előtt, nem pedig a lehetségeseket.

A továbbiakban heti kétszer 10-20 perc, vagy egyszer 20-30-45 perces részek jelentik a számítástechnikát - most már matematikába ágyazva. Második lépcsőben (5-6 hétig) az aktuális ismeretekhez kapcsolódó, de más (normál tantervű) csoportban fel sem vetett feladatok hagyományos és számítógépes megoldásának a lehetőségét vetnénk össze, minimum két alkalommal hetenként. Először külső forrásból (szakkör, jobbak házi feladatai, kollégák, stb) származó programmal DEMO jelleggel, később közösen, az órán létrehozott programmal. A külső programoknál nem a profi minőséget, abszolút bolondbiztosságot tartom fontosnak, mint inkább a rugalmasságot, és azt, hogy a tanulók számára minél érthetőbb, minél tanulságosabb legyen. Ezek között lehet egyszerű logikai játék, paraméterezéssel általánosítható számolási gyakorlat, nagy (illetve nullához közeli) számokat (10↑8, 10↑-7, stb), vagy nagyon sok tagot,

zárójelet tartalmazó feladat. Előzők folytatásaként egy-két alkalommal az egyenletekhez kapcsolódó programok kerülhetnek sorra. Ez is szerepelt a tavalyi összegzésben, nem részletezem.

Ezután a C16 (vagy GRBASIC) néhány utasítását megtanulva a grafika, a szemléletesség segíthet néhány feladattípus megoldásában: alapfüggvények ábrázolása; transzformációik; egy kis játék: bonyolultabb, kitalált képlettel megadott függvény ábrázolása. Majd egyenlőtlenségrendszerek által meghatározott ponthalmazok ábrázolása következhet. Ez az a pont, ahol a tanulókkal könnyen be lehet láttatni, milyen jó segédeszköz a számítógép, hiszen kevés fáradsággal - pont, szakasz, színezés - milyen komoly, mechanikus munkától menthet meg! A lineáris programozásra - közgazdasági szakközépiskola! - már itt lehet 2 órát szánni, a folyamatszervezés alapjait is megemlítve. Ez a bevezető "grafikus" rész együttesen egy-másfél hónapot tesz ki.

A geometriai transzformációk bevezetése következik: a definiciók megértését papíron és gépen való végrehajtás jelenti! Sajnos a ponthalmazos (mértani hely) feladatokhoz első osztályban még nem használható a gép (több egyenlet nem ismert még), ez csak III. évben aktuális.

A grafikus alkalmazások túlsúlya ellenére se feledkezzünk meg a számelméletről! Minthogy a második félévről van szó, az ilyen feladatok az első 2+5 hét során szerepelnek, vagy az ismétléskor. A részletek az "Évvégi összegzés"-ben olvashatók.

Az év végére kitűzött cél: a gép természetes segédeszközként való használata. Az ára pedig: 8-12 tiszta BASIC óra, illetve további heti 10-45 perc részben számítástechnika.

---

Az alábbiakkal újabb kisérletező tanárokat szeretnénk toborozni. Várjuk azok jelentkezését, akik ezt, vagy ehhez hasonlót szeretnének szeptembertől kipróbálni. Készül egy részletesebb tanári segédlet is, az érdeklődőknek majd szívesen megküldjük.

## SZÁMÍTÁSTECHNIKAI TEMATIKA I. félév

Simonovits Miklós "Számítástechnika" című tankönyve volt az első komoly próbálkozás, hogy a programozás oktatása tanórai keretben történjék. Közös kisérletünk egyik ága ennek a könyvnek az oktathatóságát vizsgálja különböző körülmények között. Az itt mellékelt tematika (amit reméljük továbbiak is követnek) egy másik lehetőséget ajánl: a "szabad" vonalnak ez az egyik összesített "tanulsága" másfél év alapján.

A nyolc egység kizárólag egy minimális BASIC anyag megtanítását célozza. Ehhez természetesen bárki bármi továbbit (grafika, algoritmusok, további utasítások, némi hardver, stb) hozzáadhat. Arra is bátorítunk mindenkit, hogy a félév során megírt programocskákkal további (mélyebb) matematikát oktasson - ezt az aktuális helyeken jelezzük is -, de ennek idejét nem számoltuk bele a nyolc "órába".

### ÁLTALÁNOS MEGJEGYZÉSEK

1. Fontos dolog, hogy értékelni kell a passzív tudást is! Természetesen jó lenne, ha a félév végére minél többen tudnának 5-10 soros programokat írni a felsorolt utasítás-készlettel, de ez pillanatnyilag maximalizmusnak tűnik. Ennél fontosabb, és maradandóbb, ha értik ezeket a rövid programokat: jól értik a feladatot megoldó algoritmust (ennek főleg a 4.-5. egységtől van jelentősége), illetve nagyjából ismerik az utasítások szerepét. A pontos szintaxist egy gyengébb tanuló csak jóval több gyakorlás után képes elsajátítani. Ez az aktív-passzív megkülönböztetés főleg a gyakoroltatás során kap kiemelt jelentőséget: Eszerint mondható egy feladat nehezebbnek vagy könnyebbnek.
2. Ugyancsak meg kell különböztetni, ha valami szerepel az anyagban, illetve, ha valami "felmerül". Előbbit igyekeztünk úgy csordogáltatni, hogy beleférjen az időbe, és lényeges dolog ne maradjon ki. Ennek

"teljesítése" a fő cél. Természetesen bármi előjön, azt érdemes pár szóban tisztázni. További fokozatok a "felmerül és megbeszéljük" - "felmerül és kikisérleteztetjük". Nyilván az utóbbi az időigényesebb, de valószínűleg a hatékonyabb is.
3. Sokan állítják a BASIC elavultságát. Mégis tudomásul kell venni, hogy az iskolákban lévő gépek elsősorban így értenek. Minthogy elképzelésünkben a nyelv nem cél, hanem eszköz; nem a teljesség a legfontosabb, hanem egy aránylag könnyen elsajátítható minimum, amit minél gyakoribb ismétléssel próbálunk "tudássá" tenni. Emellett hasznos, ha néhány alapfogalom (program, algoritmus, adat, stb) is nagyjából tisztázódik.
4. Feltétlenül érdemes a kicsit is nehéz dolgokat (A=A+C, FOR, IF, tömbök, stb.) többször is elővenni. Eleinte ne nagyon szerepeljenek programok több ismeretlen utasítással!
5. Tapasztalataink szerint ez a tudásmennyiség 6-12 óra alatt megtanítható. (A begyakoroltatásra vonatkozóan még nagyobb a szórás, ezért nem is neveztük az egyes egységeket "óráknak".) Úgy tűnik, eleinte (1-3. alkalom) kicsit kevesebb idő kell, később inkább több mint 45 perc. Egyértelmű észrevétel, hogy 20-25-30 percesnél rövidebb csomagokba nem érdemes tördelni. Természetesen további 1-2 óra sokat számít, főleg az elmélyítésben. Csak ötletként: sokan "gyakoroltatnak" technika órán.

A NYOLC EGYSÉG (legalább nyolc alkalom, legalább nyolc óra)

1. Gép bekapcsolása, billentyűzet, cursor. Ez éveleji ismerkedés, ismétlés közben, számolás gyakoroltatása: műveleti jelek, tizedespont. Nem túl összetett, inkább "érdekes" műveletek, esetleg egyszerűbb módosítások (képernyő editálás?). LOAD parancs.
≠ Van aki mindezt feleslegesnek érzi, rögtön programsorokkal kezd, és menetközben csinálja az "ismerkedést".

2. Program, utasítás, kifejezés, sorszám, memória. "Első program" - néhány PRINT (vagy ?) sor. Ez lényegében a múltórai számolgatás, de sorszámmal! Esetleg néhány függvény (INT, ABS, RND is szerepelhet.
≠ Az eddigi (talán unalmas) műveletvégzés helyett elképzelhető az RND(0) bevezetése (INT-tel együtt). A kiíratás, műveletek, editálás? ezen keresztül is gyakoroltathatók.

? "szöveg", karakter,szöveg. Editálás.
Azonosító, értékadás (=), LIST,RUN,NEW, utasítás-parancs.
PÉLDA Írassuk ki 123 első 4-5 hatványát, de szorzással (ne hatványozással), ez motiválja az azonosító használatát. Mi a véleményed az alábbi utasításokról:
X=X+3B, X=INT(((A+B)↑2/2), 3=A+5*C, Z=(((A+B)*C)/2)*A stb?

Mi nincs rendben ezzel a két programmal:

```
5 A=7
7 T=A*B
9 T=2*A+B
11 PRINT K;T
10 R=5
20 K=R*R*PI
30 ? T
```

Mértékegység-átváltások: óra-mp, fok-radián, (láb-cm, stb).

3. Értékadás INPUT-tal, adat, adatsor. B=B+A. Függvények.
PÉLDA: Számolások további gyorsítása. Terület-kerület számítás. Kerekítés egészre, 2-3-4 tizedesre (INT). Mi lesz D értéke A=3,B=2 esetén:

```
5 INPUT A
7 A=(A+5)*A
10 D=A/2+4
```

```
100 INPUT A,B
110 C=A+B
120 C=C+A
250 D=C+A*B
```

```
12 INPUT A,B
18 A=A*B
20 B=A+B
30 D=B+A*B
```

FOR-NEXT ciklus legegyszerűbb esete, táblázatok készítése (egyszerűbb függvények: lineáris, másodfokú egész helyeken; számok többszörösei; sorozatok). Számok hatványai (↑ és * összehasonlítása - pontosság). A=A+B feltétlenül szerepeljen (pl. sorozatok képzése, faktoriális)! Általában minden eddigi "ciklusba foglalható". PRINT után ; illetve , szerepe.

PÉLDA: Hány (különböző) számot írnak ki egyenként az alábbi programok:

```
10 FOR I=1 TO 11          10 FOR K=-4 TO 5          2 FOR Z=1 TO -4
20 ? INT(I/3)*2+1         30 PRINT (K+1)↑2          5 PRINT Z/3+1
30 NEXT I                 50 NEXT K                 7 NEXT Z
```

4. Ciklusos feladatok algoritmusainak megbeszélése, esetleg vázlatos "blokkdiagram", szerkezet. Változó határok, kifejezések a határokban.
PÉLDA: Ami előzőkből kimaradt, amivel gond volt. Írasd ki az első N páratlan szám összegét! Átlag,- százalékszámítás.

Esetleg egymásba ágyazott egyszerű ciklusok, STEP. Több utasítás :-tal.
PÉLDA: Hány számot ír ki az alábbi három program, mi a legnagyobb érték futásunként? próbáld egyetlen ciklussal megoldani a másodikat!

```
10 INPUT A,B              5 FOR I=2 TO 10      12 FOR K=0 TO 7
20 FOR I=A TO B           10 PRINT I*3         13 FOR J=1 TO 0
30 PRINT I*I              15 NEXT I            15 ? K+J*I;:NEXT J
40 I=I+1                  30 FOR J=2 TO 19     18 FOR I=3 TO 12 STEP 2
50 NEXT I                 35 PRINT J/2         20 ? K*J+I;:NEXT I
                          40 NEXT J            30 NEXT K
```

5. Oszthatóság felismerése (INT), eldöntése (IF-THEN).
PÉLDA: Párosak kiválogatása. Ötttel oszthatók, de 15-tel nem. További feltételek vizsgálata: pozitív-e, benne van-e egy intervallumban, egyenlő-e vele, eleme-e a halmaznak, védelem /0 ellen, 3 szám háromszög oldalai-e? Van-e kifogásod az alábbi programokkal szemben:

```
50 INPUT A                        10 INPUT A
60 IF A>0 THEN 70                 20 IF A>0 THEN ? "POZITIV"
70 IF (A/I)*I=A THEN ? A          30 IF A<=0 THEN 10
```

# Gyakorlottabbak szerethetik az IF, FOR sorrendet. Mégis így említettük, mert egyrészt egyszerűbbnek tartjuk, másrészt az egész "értelme" (a számelmélet) is így adódik kényelmesebben. A sorrend végeredményben egyéniség és körülmények kérdése. Egyetlen dolgot hangsúlyoznék: FOR (és ha van DO-WHILE) ciklus HELYETT SOHA ne szerveztessünk IF-fel ciklust!

6. Elágazásos feladatok algoritmusai vázlatosan, szerkezet. Esetleg kicsit bővebben az algoritmusokról, folyamatábrákról. Többszörös elágazás. Még számelmélet: FOR és IF vegyesen. Szám osztói, prímkeresés, esetleg euklideszi algoritmus. Különböző megoldások elemzése, gyorsaság szempontjából: osztókeresésnél elég SQR(N)-ig vizsgálni, stb.

7. Ismétlés, esetleg felmérő. Esetleg egy pici történelem.

8. GET A$ vagy INKEY$ segítségével lapozás, ha a kiírandó nem fér egy képernyőre. Ennek alkalmazása régebbi feladatokban (táblázatok készítése, véletlenszámok kiíratása, stb). Esetleg valami reflex-teszt, időmérés. Tömbök (csak sorozatok), ismétlés.
PÉLDA: Sorozatok generálása, és elemeiket megjegyezzük. Az első 10-15-20 szám "összekeverése". Fibonacci-sorozat (ezt érdemes esetleg tömbök nélkül is!). Két véletlen számnak milyen eséllyel van közös osztója - kisérletezés. Tíz szám melyike tér el legjobban az átlaguktól?

# A grafika sajnos kimaradt, egyrészt mert nagyon függ a körülményektől, másrészt készül egy kifejezetten geometria orientált tematika is. Ugyanakkor nagyon ajánlom, hogy próbáljon mindenki beilleszteni 2-3 alkalmat, hiszen vonzó a tanulók számára; ideális például a ciklus gyakoroltatására; és nagyon motivál az egyszerű függvényábrázolás, illetve a geometriai transzformációknál is.

Várjuk a jelentkezéseket, további észrevételeket:

Török Turul, KFKI 1525. Pf. 49.

KALLÓS KÁROLY
gimnáziumi tanár
Révai Miklós Gimnázium, Győr

# Pitagorasz tételének új bizonyítása

Pitagoraszi számhármast több, mint 4000 éve ismer és használ az emberiség; a nagy kultúrákat szinte minősíti a tétel speciális alakjának ismerete. Az általánosítás Pitagorasz nevéhez fűződik (i.e. 6. század). Egy tételt a legszegényesebb, verejtékszagú bizonyítás is igazol, ha az logikailag kifogástalan; elfogadott alapokból, megengedett lépésekkel világossá teszi a tétel igaz voltát, elkerüli az „idem per idem" csapdáját.

A ma embere egy ókori tételre adott bizonyítását legtöbbször csak addig mondhatja újnak, míg ki nem derül, hogy néhány száz éve más már ugyanúgy bizonyította — esetleg a régebbi bizonyítás egy ideig homályba került, és később valaki — függetlenül — ugyanazt az utat követte.

Pitagorasz tételét különleges rokonszenv és csodálat fogadta már a maga korában is. Könnyed szépsége mellett ebben komoly szerepet játszott a közvetlen gyakorlati használhatóság, a távoli múltba nyúló romantikus előtörténet, a szerző személyes tekintélye és — mindenek felett! — az a tény, hogy ez a nagyszabású tétel egyben első erőteljes kísérlet a geometria és az algebra mély kapcsolatainak feltárására.

Ezek — és még sok más tényező — eredményezték a tétel áttekinthetetlen mennyiségű bizonyítását. A matematikus itt nem arra törekedett, hogy valamely állítás igaz vagy hamis voltát tisztázza (ő elsőként...), hanem minden új bizonyítás a már igazolt tétel valamelyik rejtett zugába is bevilágít; új nézőpontot jelöl ki, esetleg tágítja az alkalmazások körét. Ily módon a „semleges" tétel karaktert kap, idomul a bizonyító személy szellemi-logikai arculatához.

E sorok írója 18 év alatt háromszor bizonyította be Pitagorasz tételét. Száznál több (publikált) bizonyítás áttekintése után kiderült, hogy az első kettő az ókori bizonyítások között már megtalálható valamilyen változatban. A harmadik — úgy tűnik — nem egyezik sem formailag, sem tartalmilag az elődökkel. Az újdonság kiszűrése tényismeret, naprakész tájékozottság kérdése is, ezért a tévedés lehetősége fennáll.

Az Olvasó bizonyára jól ismeri, hogy a Pitagorasz tételére vonatkozó bizonyítások 3 nagy csoportra oszthatók:

*a)* tisztán geometriai, főleg a területtranszformációkra, egyenlő területekre épülő;

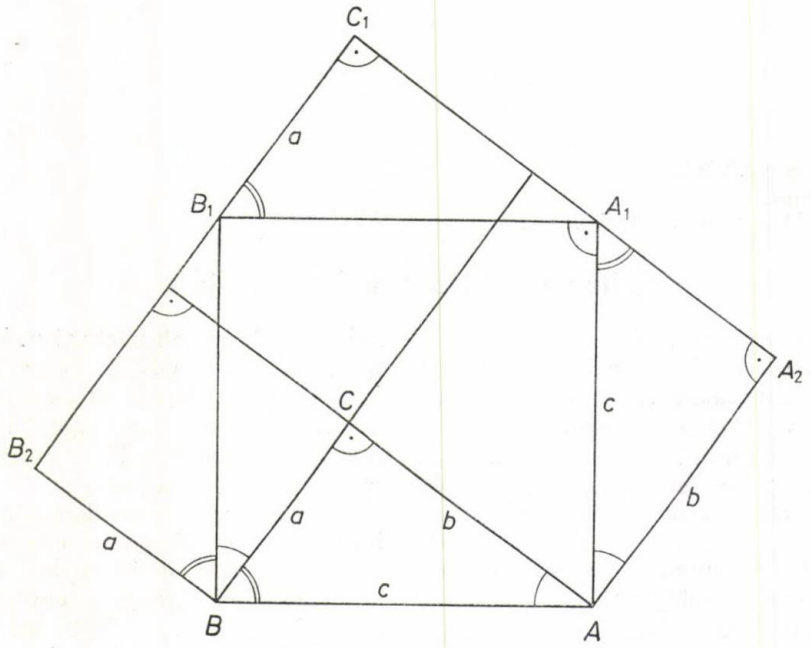
*b)* algebrai karakterű (megfelelő geometriai háttérrel);

*c)* „átdarabolásos" kivitelezések.

Az utóbbi típusúak a leggyakoribbak — (legalább 80%).

Az alábbi — vélhetőleg új — bizonyítás a szélső pontig egyszerű, csak az egybevágóság fogalmára épít, és első látásra áttekinthető. Ha mégsem bizonyulna újdonságnak, akkor is érdekes és fontos didaktikai nézőpontból. Talán a tankönyvekben is helyet kereshetne magának.

Az első ábra ugyanazon oldalon tartalmazza a $c$ oldalú négyzetet, mint a befogók közös pontját ($C$-t). Ekkor — a merőleges szárú szögek miatt — az egyíves szögek egyenlők, ezeket a kétíves szögek derékszögre egészítik ki. A $BB_1B_2 \sphericalangle$ és a $B_1A_1C_1 \sphericalangle$




*1. ábra*

„egyíves" volta több módon is belátható. Az $AA_2A_1$ háromszög, az $A_1C_1B_1$ háromszög és a $B_1B_2B$ háromszög mindegyike derékszögű és $c$ átfogójú, tehát az előbbi háromszögek egybevágók, egyenlő területűek:

$$ABC\triangle \cong AA_1A_2\triangle \cong A_1B_1C_1\triangle \cong B_1BB_2\triangle .$$

A $c^2$ területet úgy kapjuk, hogy az egész idom területéből levonjuk az ábra szerinti felső és a két oldalsó háromszög területét:

$$c^2 = a^2+b^2+\frac{1}{2}ab+ab-3\cdot\frac{1}{2}ab = a^2+b^2+\frac{3}{2}ab-\frac{3}{2}ab = a^2+b^2.$$

Tehát valóban $c^2=a^2+b^2$ teljesül, ha a háromszög derékszögű. A bizonyítás gondolatmenete a tétel megfordítására *is* alkalmas! A terület ui. akkor és csakis akkor $\frac{1}{2}ab$, ha $a$ és $b$ derékszöget zár be, vagyis befogó.

Véletlen érdekesség, hogy az 1. ábra alkalmas elfordításával ugyanez az ábra egy lényegesen különböző másik bizonyítást kínál. Abból indulunk ki, hogy az $a+b$ oldalú négyzet területéből csak az alapháromszög területe hiányzik. Ezért tehát:

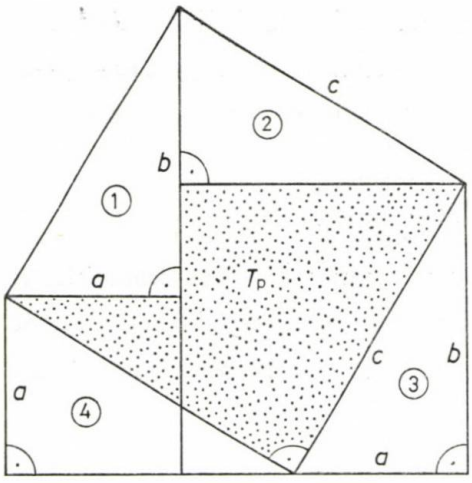
$$(a+b)^2-\frac{1}{2}ab = c^2+\frac{3}{2}ab,$$

ebből

$$a^2+b^2 = c^2.$$

Ez a változat majdnem azonos Héron bizonyításával.

Nem meglepő, hogy az első ábrához kapcsolt bizonyításnak is van ókori „rokona", az i. sz. 800-as évekből. A két bizonyítás ábrájának valamelyes hasonlósága azonban csupán formai és nem strukturális. Ott az igazolás „átdarabolásos", itt geometriai struktúrán alapuló algebrai. Az ókori bizonyításhoz a 3. ábra tartozik.

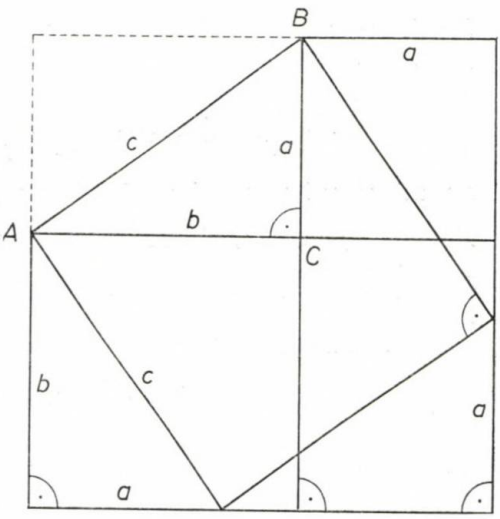



$T_p + T_1 + T_2 = c^2$

$T_p + T_3 + T_4 = a^2 + b^2$

(p pettyezett)

*2. ábra*




*3. ábra*

BEREZNAI GYULA
ny. főiskolai tanár
Nyíregyháza

## A gyökvonás egy algoritmusáról

Középiskolás tanulóink a négyzetgyökvonás gyakorlati végrehajtását az ismert módon: egy rekurzív számsorozat elemeinek meghatározásával végzik, amely eljárás a gyakorlat számára megfelelő pontosságot szolgáltat. Magasabb gyökkitevő esetén azonban nem áll rendelkezésükre hasonló algoritmus, hanem a logaritmus azonosságaira és a logaritmustáblázat használatára vannak kényszerülve. A négyzetgyökvonásnál felhasznált rekurzív formula általánosításával némi analízisbeli előismeret birtokában azonban a tanuló egy bármikor alkalmazható, könnyen megérthető működésű és tetszőleges pontosságú eredményt szolgáltató algoritmus birtokába juthat. Célunk ezen gyökvonási algoritmus ismertetése. Legyen $a$ egy pozitív valós szám, $k \geqq 2$ természetes szám és $a_0$ a $\sqrt[k]{a}$-nak egy tetszőleges közelítő értéke. Tekintsük a következő rekurziót:

$$a_n = \frac{1}{k}\left[(k-1)a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}^{k-1}}\right] \quad (n = 1, 2, \ldots;\ a_0 > 0 \text{ tetszőleges}).$$

Az ezzel a rekurzióval nyerhető $\{a_n\}$ sorozat $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ elemei természetesen mind közelítő értékei lesznek $\sqrt[k]{a}$-nak, sőt mint mindjárt látni fogjuk, mindegyik jobb közelítő értéke, mint a sorozat előző eleme, s ha $n$ elég nagy, velük a közelítésben tetszőleges pontosságot is elérhetünk.

A fenti $\{a_n\}$ sorozat minden eleme pozitív, ezért alkalmazható rájuk a számtani és mértani közép közötti ismert összefüggés. Súlyozzuk $a_{n-1}$-et $(k-1)$-gyel, az $\frac{a}{a_{n-1}^{k-1}}$-et 1-gyel, akkor a számtani közép pontosan a sorozat $n$-edik eleme lesz, a mértani közép pedig az $a$ szám $k$-adik gyöke, amint az az

$$a_n = \frac{1}{k}\left[(k-1)a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}^{k-1}}\right] > \sqrt[k]{a_{n-1}^{k-1} \cdot \frac{a}{a_{n-1}^{k-1}}} = \sqrt[k]{a} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

szerinti szigorú egyenlőtlenségből látható, s amely szerint a sorozat elemei felülről közelítik a $\sqrt[k]{a}$-t, de egyikük sem lehet egyenlő azzal. A sorozat egy alsó korlátja tehát éppen $\sqrt[k]{a}$. Az $\{a_n\}$ sorozat monoton is, amint az a következőképpen könnyen belátható:

A korlátosság miatt

$$0 < \sqrt[k]{a} < a_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

amiből

$$a_{n-1}^k > a > 0,$$

ebből pedig

$$0 < \frac{a}{a_{n-1}^k} < 1$$

adódik, tehát

$$k - 1 + \frac{a}{a_{n-1}^k} < 1 + k - 1 = k.$$

Ezzel nyilvánvalóan

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{k}\left[(k-1) + \frac{a}{a_{n-1}^k}\right] < \frac{1}{k} \cdot k = 1.$$

Innen pedig $a_{n-1} > 0$-sal szorzás után kapjuk, hogy

$$a_n < a_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sorozatunk tehát szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, ebből következően konvergens is.

Legyen $\{a_n\}$ határértéke $A$:

$$a_n \to A \quad \text{és} \quad a_{n-1} \to A, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Ezt a határértéket számszerűen egyszerűen megkaphatjuk, az

$$A = \frac{k-1}{k} A + \frac{a}{kA^{k-1}}$$

egyenlet $A$-ra való megoldásával, ugyanis ismeretes, hogy konstanssal szorzott sorozat határértéke egyenlő a sorozat határértékének konstansszorosával és konvergens sorozatok összegének határértéke a határértékek összege. Az egyenlet megoldása pedig:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A = \sqrt[k]{a},$$

amiből nyilvánvaló, hogy a sorozatnak $\sqrt[k]{a}$ nemcsak alsó korlátja, de alsó határa is.

A közelítés mértékét

$$|a_n - \sqrt[k]{a}|\,[a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\sqrt[k]{a} + a_n^{k-3}(\sqrt[k]{a})^2 + \ldots + (\sqrt[k]{a})^{k-1}] = a_n^k - a$$

szerint is egyszerűen (de elég durván) becsülhetjük, ám ez a hibabecslés még jelentősen javítható. Mint az (pl. a binomiális tétel segítségével) könnyen bizonyítható, az $n$-edik közelítés körülbelüli hibája:

$$|a_n - \sqrt[k]{a}| \approx \frac{|a_n^k - a|}{k a_n^{k-1}}.$$

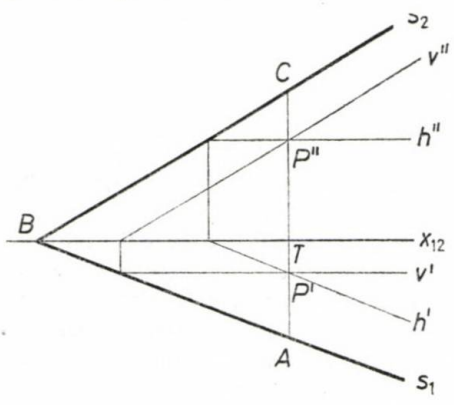
SZÁMADÓ LÁSZLÓ
középiskolai tanár
Veres Péter Gimnázium, Budapest

## Ábrázoló geometriai szerkesztésekből síkgeometriai állítások

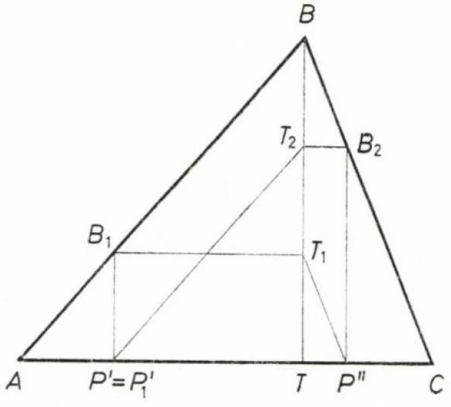
Ábrázoló geometriai szerkesztések közül néhányat kiválasztottam, amelyeket kis módosítással síkgeometriai állítások formájában is megfogalmazhatunk. Az 1. és 2. feladat esetében a Monge-féle kétképsíkos rendszert használjuk, a 3. esetében pedig ortogonális axonometriát. Mind a három esetben először megnézzük az ábrázoló geometriai szerkesztést, azután megfogalmazzuk a síkgeometriai állítást és végül bebizonyítjuk az így kapott feladatot.

**1.** A Monge-féle kétképsíkos rendszerben ábrázoljunk egy $\alpha$ dőlt síkot nyomvonalaival. Vegyünk fel továbbá egy $P$ pontot, és rögzítsük a $P''$ második képet. A $P$ pont első képét szerkesszük meg úgy, hogy a $P$ pont illeszkedjen az $\alpha$ síkra. Megoldásunkhoz vagy a vertikális vagy a horizontális fővonalat használjuk, de mind a két esetben a $P'$ pontot kell kapnunk. *(1. ábra.)*

Az eddigiek alapján a következő állítást tudjuk megfogalmazni, most már ábrázoló geometriai tartalom nélkül:

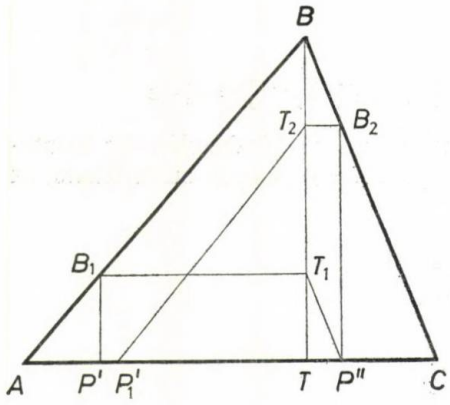



*1. ábra*




*2. ábra*

*Adott az ABC háromszög és a BT magassága (2. ábra). Az AT szakaszon felveszünk egy P' pontot és bejárjuk a P', $B_1$, $T_1$, P'', $B_2$, $T_2$, $P_1'$ utat, ahol*




3. ábra

*$B_1$ az AB oldalon van és $P'B_1 \| TB$,*
*$T_1$ a BT magasságon van és $B_1T_1 \| AT$,*
*$P''$ a TC szakaszon van és $T_1P'' \| BC$,*
*$B_2$ a BC oldalon van és $P''B_2 \| BT$,*
*$T_2$ a BT magasságon van és $B_2T_2 \| CT$,*
*$P_1'$ az AT szakaszon van és $T_2P_1' \| AB$.*
*Bizonyítsuk be, hogy $P'$ és $P_1'$ pontok egybeesnek.*

A bizonyítást a *3. ábrán* látható vázlatrajz segítségével végezzük. Tetszőleges $P'$ pont esetén (ami egyértelműen meghatároz egy $P''$ pontot a feladatunk szövege szerint) igaz a

$$TP'' : P''C = AP' : P'T \qquad (1)$$

összefüggés. Először igazoljuk ezt. $P''T_1$ párhuzamos $BC$-vel, ezért $BTC$ háromszögben a párhuzamos szelők tételét alkalmazhatjuk, ezek szerint:

$$TP'' : P''C = TT_1 : T_1B,$$

mivel $TT_1 = P'B_1$, ezért

$$TT_1 : T_1B = P'B_1 : T_1B.$$

$AP'B_1\triangle \sim B_1T_1B\triangle$, ezért

$$P'B_1 : T_1B = AP' : B_1T_1.$$

Tudjuk, hogy $B_1T_1 = P'T$, ez alapján

$$AP' : B_1T_1 = AP' : P'T.$$

A négy azonosság összehasonlításával valóban az (1) összefüggést kapjuk. A feladat szövege szerint $P''$ ponthoz egyértelműen tartozik a $P_1'$ pont. Erre a két pontra is teljesül az előzőekben igazolt összefüggés:

$$TP_1' : P_1'A = CP'' : P''T.$$

Ezt a

$$TP'' : P''C = AP_1' : P_1'T \qquad (2)$$

alakban is írhatjuk. (1) és (2) alapján

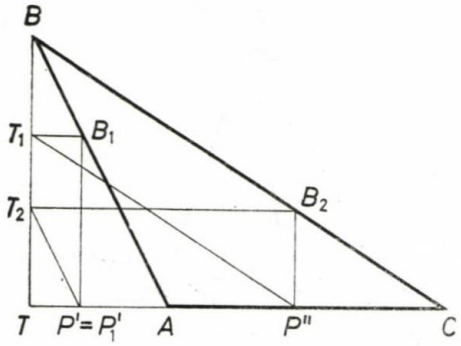
$$AP' : P'T = AP_1' : P_1'T. \qquad (3)$$

Mivel $AT$ szakasznak $P'$ és $P_1'$ is pontja, ezért (3) csak úgy teljesülhet, ha $P'$ és $P_1'$ egybeesik.

A *2. ábrán* hegyesszögű háromszöget vettünk fel, de belátható, hogy $ABC$ háromszögre nem kell ilyen erős megszorítást tennünk. Ha az $ABC\sphericalangle$ derékszög vagy ha tompaszög, akkor ugyanígy bizonyítjuk. Ha $BAC\sphericalangle$ vagy $BCA\sphericalangle$ tompaszög, akkor is az előzőek szerint bizonyítjuk, csak az ábra módosul *(4. ábra)*. Ha $BAC\sphericalangle$ vagy $BCA\sphericalangle$ derékszög, ekkor a feladatban jelzett út nincs egyértelműen meghatározva. Ebben az esetben nincs értelme a feladatunk állításának.

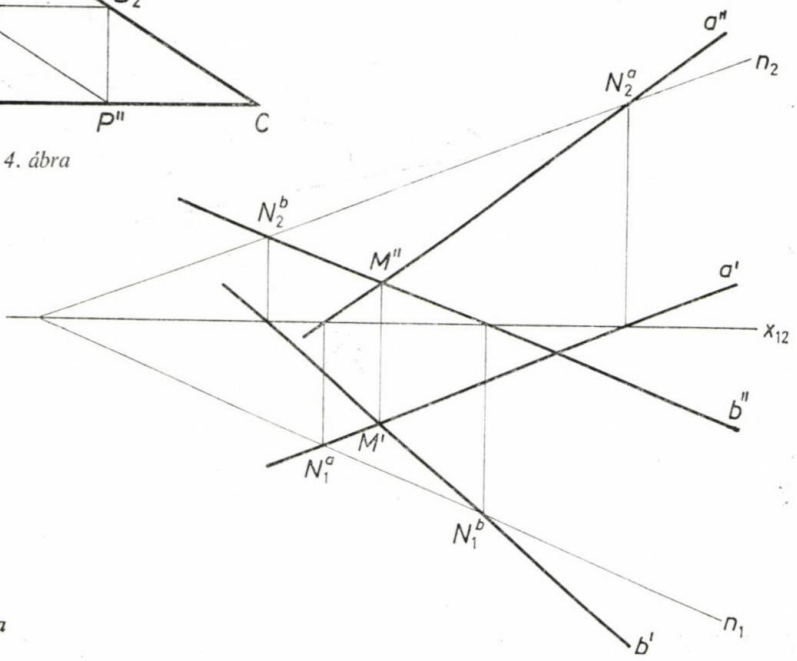
**2.** Legyen adott két egymást metsző $a$ és $b$ egyenes a két-két képével. Szerkesszük meg az ezeket tartalmazó $\alpha$ sík nyomvonalait.

Az egyenesek benne vannak $\alpha$ síkban, ezért nyompontjaiknak illeszkedni kell az $\alpha$ sík nyomvonalaira. Az $a$ egyenes nyompontjai $N_1^a$ és $N_2^a$, a $b$ egyenes nyompontjai




4. ábra

$N_1^b$ és $N_2^b$. Ezt a négy pontot megszerkesztjük. Az $N_1^a$ és $N_1^b$ pontokra illeszkedő egyenes lesz az $\alpha$ sík $n_1$ nyomvonala, az $N_2^a$ és $N_2^b$ pontokra illeszkedő egyenes lesz az $n_2$




5. ábra

nyomvonal. Ezt a szerkesztést az *5. ábrán* láthatjuk. A nyomvonalak tulajdonsága, alapján $n_1$ és $n_2$ az $x_{12}$ egyenesen metszi egymást vagy párhuzamosak az $x_{12}$ egyenessel.

Ezt a tulajdonságot is megfogalmazhatjuk ábrázoló geometriai fogalmak nélkül. Nem kell figyelembe vennünk a rendezők merőlegességét az $x_{12}$ egyenesre, elegendő a párhuzamosságukra hivatkozni. Feladatunk így fogalmazható meg:

*Az $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ konvex négyszögek úgy helyezkednek el egy síkban, hogy az $A_3$, $A_4$, $B_1$ és $B_2$ csúcsok kollineárisak, továbbá az $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ és $A_4B_4$ szakaszok párhuzamosak. (6. ábra.) Igazoljuk, hogy ha a két négyszögben az átlók $M_1$, illetve $M_2$ metszéspontjára illeszkedő egyenes párhuzamos az $A_iB_i$ egyenesekkel, akkor az $A_1A_2$, $A_3A_4$, $B_1B_2$ és $B_3B_4$ egyenesek egy sugársorhoz tartoznak!*

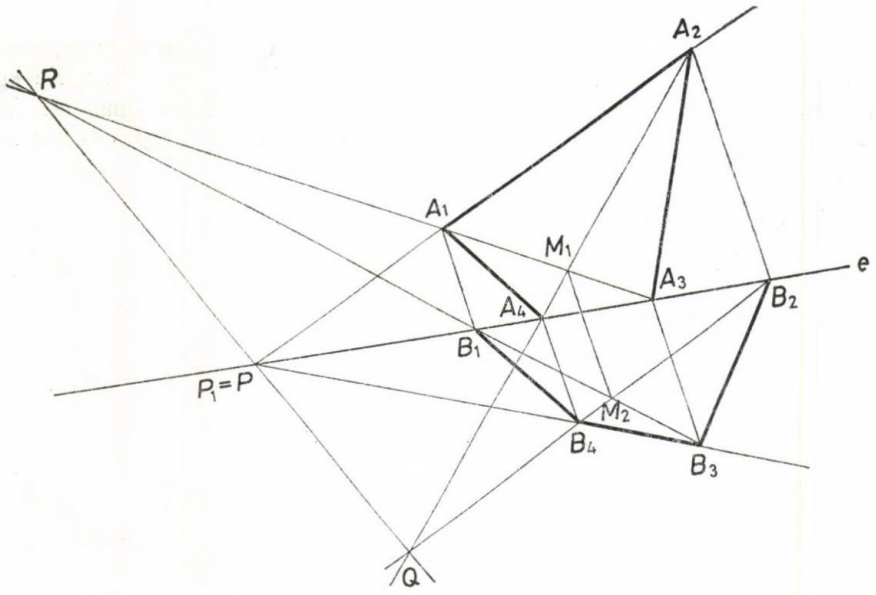
(lásd: A Matematika Tanítása, 1986/3. szám 92. oldal.)

A bizonyításhoz Desargues-tételét használjuk:

Két háromszög pontra nézve akkor és csak akkor perspektív, ha egyenesre nézve is perspektív.

Desargues tételét nem bizonyítjuk, (lásd pl: Hajós György bevezetés a geometriába), csak az eredeti állításunkat.

Ha $M_1M_2 \| A_1B_2$, akkor $A_1M_1A_2$ háromszög és $B_1M_2B_2$ háromszög egy végtelen távoli pontra nézve lesz perspektív. A Desargues-tétel szerint egyenesre nézve is az, vagyis a megfelelő oldalegyenes párok egy egyenes három, egymástól nem feltétlenül




*6. ábra*

különböző pontján haladnak át. A *6. ábra* jelölése szerint:

$$l(A_1M_1)\cap l(B_1M_2) = R,$$

$$l(M_1A_2)\cap l(M_2B_2) = Q,$$

$$l(A_1A_2)\cap l(B_1B_2) = P,$$

és $P, Q, R$ pont egy egyenesre illeszkedik. Hasonlóan az $A_4M_1A_3$ háromszög és $B_4M_2B_3$ háromszög is pontra nézve perspektív.

Mivel

$$l(A_1M_1) = l(M_1A_3) \quad \text{és} \quad l(B_1M_2) = l(M_2B_3), \quad \text{ezért}$$

$$l(M_1A_3)\cap l(M_2B_3) = R.$$

Mivel $l(M_1A_2)=l(A_4M_2)$ és $l(M_2B_2)=l(B_4M_2)$, ezért

$$l(A_4M_1)\cap l(B_4M_2) = Q.$$

A harmadik oldalpár esetében pedig

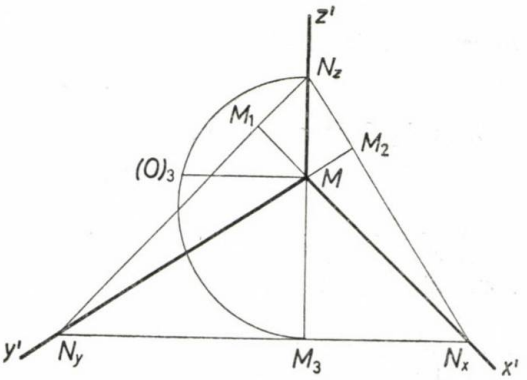
$$l(B_4B_3)\cap l(A_4A_3) = P_1.$$

Desargues tétele szerint $P_1$, $Q$, $R$ pont is egy egyenesen van. A $P$ pont illeszkedik az $l(RQ)$ egyenesre és az $e$ egyenesre, de a $P_1$ pont ugyanezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik. $l(RQ)$ és $e$ metsző egyenesek, ezért $P$ pont azonos $P_1$ ponttal.

Állításunkat ezzel bizonyítottuk, hiszen a Desargues tétele az ideális térelemekre is vonatkozik. Ha $P$ végtelen távoli, akkor lesz $l(A_1A_2)\|l(B_4B_3)$, egyébként az $e$ egyenesen metszik egymást.

**3.** A következőkben térjünk át az ortogonális axonometrában használt fogalmakra. Az $x$, $y$ és $z$ egyenesek az $O$ pontban metszik egymást és páronként merőlegesek. Az axonometrikus síkot $N_x$, $N_y$, $N_z$ pontokban döfik ezek az egyenesek. Ortogonális axonometria esetén az $N_xN_yN_zO$ egy tetraédert határoz meg úgy, hogy az

$N_xN_yN_z$ háromszög magasságpontját és az $O$ pontot összekötő szakasz merőleges az $N_xN_yN_z$ síkjára. Az $x$, $y$ és $z$ egyenesek vetületét az axonometrikus síkon $x'$-vel, $y'$-vel és $z'$-vel jelöljük, az $O$ pont vetületét pedig $M$-mel. Határozzuk meg az $O$ pont távolságát az axonometrikus síktól szerkesztéssel *(7. ábra)*.

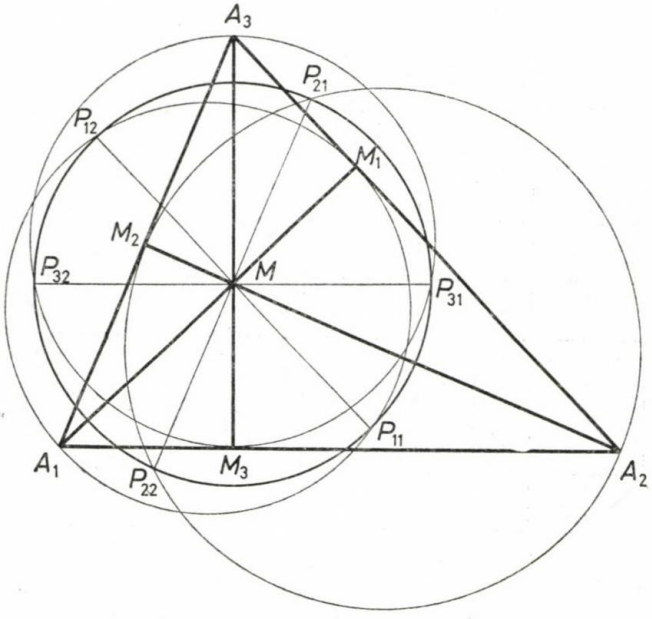



*7. ábra*

Az $N_xN_yN_z$ háromszög magasságvonalai az $x'$, $y'$ és $z'$ egyenesek lesznek. A magasságok talppontjai az $M_1$, $M_2$, $M_3$. Ha az $M_3N_z$ fölé Thalész-kört szerkesztünk és $M$-ben merőlegest állítunk $M_3N_z$-re. Kapjuk az $(O)_3$ pontot. ($(O)_3$ pont az $O$ pont $M_3N_z$ körüli beforgatását jelenti az axonometrikus síkba). Az ábrán $(O)_3M$ távolság már az eredeti hosszban látszik. Nem csak az $M_3N_z$ körül forgathatjuk be az $O$ pontot, hanem az $M_1N_x$ és az $M_2N_y$ körül is. Mind a három esetben ugyanazt a távolságot kapjuk, vagyis $(O)_3M = (O)_2M = (O)_1M$.

Az indexek azt mutatják, hogy melyik egyenes körül forgattunk. Ezek alapján a következő állítást fogalmazhatjuk meg:

*Adott egy hegyesszögű háromszög. Mind a három magasságára Thalész-kört szerkesztünk és mind a három magasságvonalra a magasságpontban merőlegest állítunk. Az egy magassághoz tartozó Thalész-kör és merőleges egyenes két pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott hat pont egy körre illeszkedik.*




*8. ábra*

A bizonyítást axonometriai meggondolások nélkül a *8. ábrán* használt jelölésekkel végezzük el.

Mivel $P_{11}M = MP_{12}$, $P_{21}M = MP_{22}$ és $P_{31}M = MP_{32}$, ezért elég megmutatni a $P_{11}M = P_{31}M$ egyenlőséget. Az $A_3MM_1\triangle \sim A_1MM_3\triangle$-höz, ezért

$$A_3M : MM_1 = A_1M : MM_3.$$

Ebből következik az

$$A_3M \cdot MM_3 = MM_1 \cdot A_1M \qquad (1)$$

összefüggés. Az $A_3M_3P_{31}$ háromszögben a magasság tétel szerint:

$$A_3M \cdot MM_3 = (MP_{31})^2 \tag{2}$$

és $A_1M_1P_{11}$ háromszögben a magasság tétel szerint:

$$MM_1 \cdot A_1M = (MP_{11})^2, \tag{3}$$

(1), (2) és (3) alapján $MP_{31}=MP_{11}$. Teljesen hasonlóan láthatjuk be a $P_{31}M=$ $=P_{21}M$ egyenlőséget is. Ezért a feladatban szereplő hat pont egy $M$ középpontú körre illeszkedik.

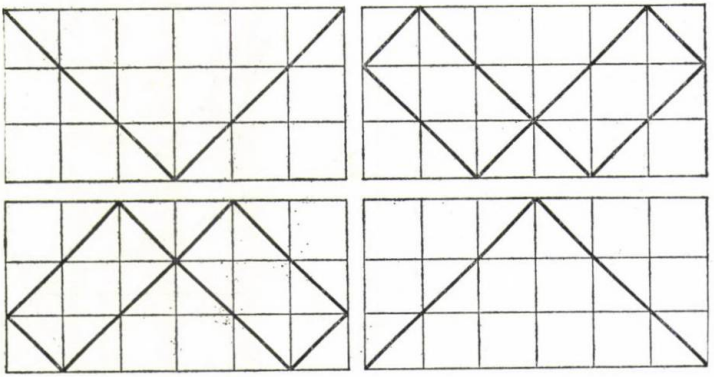
DR. DARVASI GYULA
főiskolai adjunktus
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

## A cikcakk-szorzástól az euklidészi algoritmusig

A pozitív egész számok halmazán geometriailag értelmezünk egy szokatlan szorzási módot, és megvizsgáljuk annak műveleti tulajdonságait.

Az $a$ és $b$ pozitív egész számok cikcakk-szorzatán, amit $a \otimes b$ (olvasd: a cikcakk b) jelöl, érteni fogjuk azon különböző utak számát, amelyek négyzetrácson egy $a \times b$ típusú egyenesen álló (Ezt a tulajdonságot a továbbiakban mindig feltételezzük!) téglalapban a következőképpen rajzolandók:

— minden út csak a rácsnégyzetek átlói mentén haladhat,
— egy út irányváltoztatás nélkül halad mindaddig, míg a téglalap valamelyik oldalához nem ér: az oldalról visszaverődik és folytatódik tovább,
— a téglalap bármely csúcsába érve az út végetér,
— az utak berajzolása akkor fejeződik be, ha a téglalapban már minden rácsnégyzet mindkét átlója pontosan egyszer be van rajzolva.



*1. ábra*

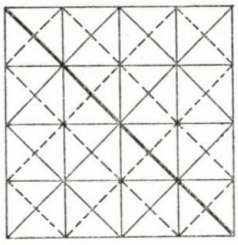
Példaként határozzuk meg a $3 \otimes 6$ szorzat értékét, amely az *1. ábráról* olvasható le, ahol az egyes utakat külön-külön rajzoltuk meg. Azok egyetlen $3 \times 6$-os téglalapon történő berajzolásával látható, hogy abban minden rácsnégyzet átlóján pontosan egyszer végighaladtunk: így tehát $3 \otimes 6 = 4$ adódik.

A cikcakk-szorzás műveleti tulajdonságait illetően az adott geometriai értelmezésből azonnal következik a kommutativitás, minthogy egy $a \times b$ típusú téglalap egyúttal $b \times a$ típusúnak is tekinthető.

Nyilvánvaló, hogy a négyzetrácsot alkotó $1 \times 1$-es „téglalapok" mindegyikében a két átló adja a lehetséges utakat: vagyis $1 \otimes 1 = 2$. Vizsgáljuk ezután $a > 1$ esetén

az $1\times a$ típusú téglalapokat. Egy ilyen téglalapot úgy is előállíthatunk, hogy egy $1\times 1$-es rácsnégyzet mellé ugyanazon irányban haladva egyesével hozzáveszünk $a-1$ számú mindenkor közvetlenül szomszédos $1\times 1$-es rácsnégyzetet. Eközben az egymáshoz egy közös oldal mentén csatlakozó $1\times 1$-es rácsnégyzetek átlói a közös csúcsokban összekapcsolódnak, és így az első $1\times 1$-es rácsnégyzet mindkét átlója most már ezen $1\times a$ típusú téglalap $a$ hosszúságú oldalairól visszaverődve folytatódik az utolsó $1\times 1$-es rácsnégyzet valamelyik csúcsáig. Ez viszont pontosan azt jelenti, hogy a tekintett $1\times a$ típusú téglalapban ugyanannyi út rajzolható meg, mint az első $1\times 1$-es rácsnégyzetben: azaz minden pozitív egész a szám esetén $1\otimes a=2$.

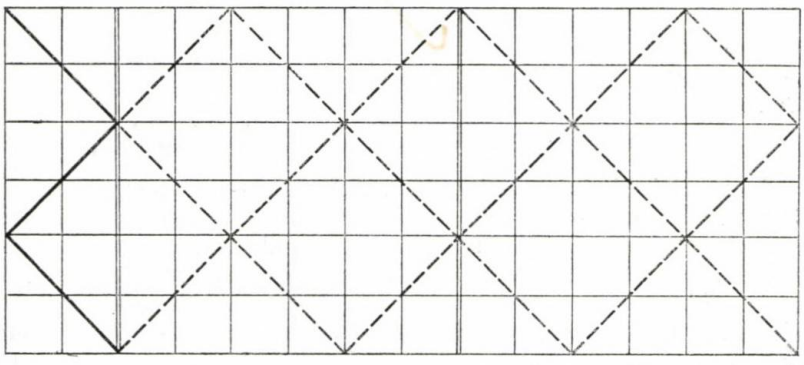
Ha vizsgálatainkat $a>1$ esetén az $a\times a$ típusú rácsnégyzetekben megrajzolható összes út megszámlálásával folytatjuk, akkor minden ilyen négyzetben lehetséges útként a két átló, valamint annyi téglalap adódik, ahány belső rácspontja van egy $a$ hosszúságú oldalnak *(2. ábra)*. Emiatt pedig $a\otimes a=2+(a-1)=a+1$, amely az $a\geqq 1$ megengedésével az előző $1\times 1$-es esetet is tartalmazza.



*2. ábra*

Ezek után illesszünk egymás mellé $k(>1)$ számú $a\times a$ típusú négyzetet úgy, hogy egy $a\times(ka)$ típusú téglalapot kapjunk. Ebben az első $a\times a$ típusú négyzetbeli utak folytatódnak, így az $a\times(ka)$ típusú téglalapban ugyanannyi lehetséges út van, mint az első $a\times a$ típusú négyzetben: ezért minden pozitív $k$ egész számra $a\otimes(ka)=a\otimes a=a+1$ adódik.

Hátra van még az $a\otimes b$ szorzat értékének meghatározása $b=ak+r$ $(0<r<a$ és $k$ pozitív egész szám) esetén. Ekkor a következőképpen járhatunk el. Az $a\times b$ típusú téglalapot először is felbontjuk egy $a\times r$ típusú téglalapra és $k$ darab $a\times a$ típusú négyzetre. Majd az $a\times r$ típusú téglalapban valamely lehetséges utat berajzolva megfigyelhető, hogy ez az út az első (majd az összes többi) szomszédos $a\times a$ típusú négyzetet hozzávéve azokban folytatódik *(3. ábra)*. Ezért az $a\times b$ típusú téglalapban megrajzolható összes út száma ugyanannyi mint az $a\times r$ típusú téglalapban: azaz ebben az esetben $a\otimes b=a\otimes r$. Ez a tény nagy számok esetére már lényegesen megkönnyíti a cikcakk-szorzás elvégzését. Még könnyebb lesz a dolgunk, ha felismerjük ennek ismételt alkalmazhatóságát: ezáltal $b>a$ esetén az ismert



*3. ábra*

$$b = ak_1+r_1 \quad (0 < r_1 < a),$$
$$a = r_1k_2+r_2 \quad (0 < r_2 < r_1),$$
$$r_1 = r_2k_3+r_3 \quad (0 < r_3 < r_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n+2} = r_{n-1}k_n+r_n \quad (0 < r_n < r_{n-1}),$$
$$r_{n-1} = r_nk_{n+1}+r_{n+1} \quad (r_{n+1} = 0)$$

euklidészi algoritmushoz jutunk. Ekkor ugyanis

$$a \otimes b = a \otimes (ak_1 + r_1) = a \otimes r_1 = r_1 \otimes (r_1 k_2 + r_2) = r_1 \otimes r_2 = \ldots$$

$$\ldots = r_{n-2} \otimes r_{n-1} = r_{n-1} \otimes r_n = (r_n k_{n+1}) \otimes r_n = r_n \otimes r_n = r_n + 1$$

adódik, ahol $r_n$ az $a$ és $b$ pozitív egész számok legnagyobb közös osztója: ezért tehát $a \otimes b = (a, b) + 1$ adódik. Könnyű meggyőződni arról, hogy ez minden $a$ és $b$ pozitív egész számra teljesül. Ennek alapján most már könnyen készíthető egy műveleti táblázat *(4. ábra)*, ahonnan leolvasható a művelet kommutatív, de egyúttal nem asszociatív jellege is. Megjegyezzük még, hogy nagyobb számokra a táblázat a soraiban (vagy akár oszlopaiban) meglevő periódikusság miatt minden további számolás nélkül folytatható.

| ⊗ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| 4 | 2 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 6 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 7 | 2 | 3 | 4 | 3 |
| 7 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 | 2 | 2 | 2 |
| 8 | 2 | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | 2 | 9 | 2 | 3 |
| 9 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 10 | 2 |
| 10 | 2 | 3 | 2 | 3 | 6 | 3 | 2 | 3 | 2 | 11 |

*4. ábra*

IRODALOM


[1] R. STOWASSER: *Problemorientierte Zugänge zur Geometrie.* Schriftenreihe des IDM Bielefeld, 3/1974, 65—129. oldal.
[2] TURÁN—LÁNCZINÉ: *Számelmélet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
[3] N. J. VILENKIN: *Kombinatorika.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.



SIMON LÁSZLÓ
szaktanácsadó
Turkeve


## Fixpont-iteráció személyi számítógépen

A személyi számítógépek iskolai megjelenése, — a matematikaórán való használatának lehetősége — alkalmat teremt arra, hogy algebrai és transzcendens egyenlet gyökeit a számítógép felhasználásával rövid idő alatt adott pontossággal meghatározzuk. Az egyenletek közelítő megoldására több módszer ismeretes. Az egyik leglátványosabb és a programozás szempontjából is előnyös módszer a fixpont iterációs eljárás. A mikrogépek nagy felbontású, színes grafikája kiválóan alkalmas finom rajzolatú ábrák készítésére, és ezek elemzés céljából papíron is rögzíthetők. A módszer a szemléletessége mellett mélyebb összefüggések, absztrakt matematikai fogalmak (korlátosság, rekurzív sorozat, határérték stb.) kialakítására és megerősítésére is alkalmas.

Az a feladat, hogy valamely adott $f(x)=0$ egyenlet gyökeinek közelítő értékét adott pontossággal meghatározzuk (ahol $x \in \mathbf{R}$). A feladat első része abban áll, hogy

meghatározzunk két olyan $a$ és $b$ számot (ahol $a \in \mathbf{R}$ és $b \in \mathbf{R}$), amely által meghatározott zárt intervallumban a keresett gyök megtalálható. Ha $f(a)<0$ és $f(b)>0$, vagy $f(a)>0$ és $f(b)<0$, akkor létezni kell az $a$ és $b$ között fekvő oly közbenső $x_p$ értéknek, amelynél $f(x_p)=0$.

Legyen az $x \mapsto f(x)$ függvény értelmezve az $[a; b]$ intervallumon, legyen folytonos és differenciálható.

Legyen adva a következő egyenletünk:

$$f(x) = 0.$$

Végezzük el a következő ekvivalens átalakítást:

$$x+f(x)-x = 0,$$

és vezessük be:

$$x = x+f(x) = g(x)$$

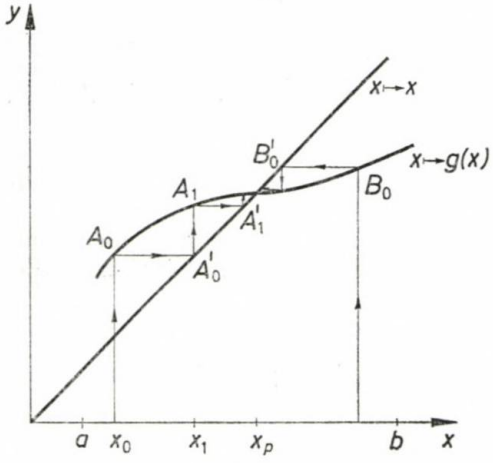
jelölést, ahol $x \in [a; b]$.

Ilyen módon kiinduló egyenletünk a következő alakot ölti:

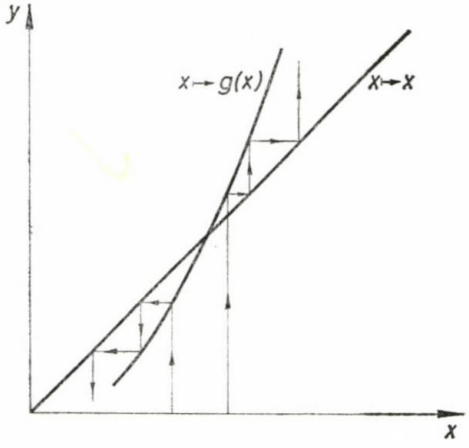
$$x = g(x).$$

Lényegében két függvényről beszélhetünk ($x \mapsto x$ és $x \mapsto g(x)$), amelyek az adott halmazon értelmezve vannak és folytonosak. Keressük azt az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $x_p$ értéket, amely értéknél mindkét függvény értéke egyenlő vagy közel egyenlő, illetve a két függvényérték különbsége egy előre meghatározott értéknél kisebbé tehető.

Nyilvánvaló, hogy ha $x \mapsto f(x)$ függvénynek az $[a; b]$ intervallumban $x_p$ egyetlen gyöke, akkor $g(x_p)=x_p$. Ezért az $x_p$-t a $g$ függvény fixpontjának is nevezik.

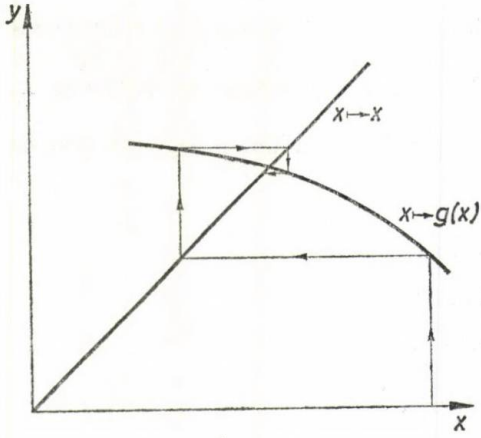



*1. a) ábra*




*1. b) ábra*

Először vizsgáljuk eljárásunkat geometriai szemlélet alapján. Legyen az $f(x)=0$ egyenletnek az $[a; b]$ intervallum belsejében elhelyezkedő $x_p$ egyetlen gyöke. Az első ábrán megrajzolt $x \mapsto g(x)$ és $x \mapsto x$ identitás függvénynek az $[a; b]$ intervallumba eső metszéspontjának koordinátája $F(x_p; x_p)$. Az $F$ pontot fixpontnak nevezik. A keresett gyök első közelítése $x_0$, a $g(x)$ függvény görbéjén levő $A_0$ pont abszcisszája. Amikor kiszámítjuk, illetve megrajzoljuk a $g(x_0)$ értékét, ez a rajzon azt jelenti, hogy




*1. c) ábra*

meghatározzuk az $A_0$ pont ordinátáját. Legyen az $y=g(x_0)$ egyenesnek és az $y=x$ egyenesnek a metszéspontja $A_0'$. Az $A_0'$ pont koordinátája $x_1$, illetve $g(x_0)$. Hasonló elgondolás alapján az $A_1$ pont koordinátáját, majd az $A_1'$ pont koordinátáját állapítjuk meg. Az eljárást többször megismételve egy sorozathoz jutunk:

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = g(x_{n-1}), \quad \text{ahol} \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

Feltéve a $g(x)$ függvény folytonosságát és a sorozat konvergenciáját

$$\lim x_n = \lim g(x_{n-1}) = g(\lim x_{n-1}) = x_p,$$

vagyis:

$$x_p = g(x_p),$$

ahol $x_p$ a $g(x)$, illetve az $f(x)$ egyenlet egyetlen gyöke az $[a; b]$ intervallumban.

Gyakran előfordul, hogy a rekurzív formulával megadott sorozat nem konvergens; ekkor az eljárás nem vezet eredményre.

A konvergencia attól függ, hogy az $x \mapsto g(x)$ függvény meredekségére milyen megállapítást teszünk, illetve tehetünk a vizsgált intervallumban, a várható gyök környezetében.

Az *1. ábrákból* világosan látható, hogy a sorozat konvergenciájának, illetve divergenciájának feltétele attól függ, hogy az $x \mapsto g(x)$ függvény deriváltjának abszolút értéke a gyök környezetében kisebb-e, vagy nagyobb-e, mint 1, függetlenül attól, hogy a közelítést melyik oldalon vettük fel.

Tehát az $x_n$ sorozat konvergens, ha $|g'(x)|<1$.

Analitikusan az eljárás konvergenciáját ebben az esetben a következőképpen láthatjuk be:

A feltételezésünk értelmében a $g(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallum minden pontjában differenciálható, és $x_1, x_2 \in [a; b]$, akkor létezik olyan $t \in (x_1, x_2)$ változó érték, amelyre igaz:

$$g(x_2) - g(x_1) = g'(t) \cdot (x_2 - x_1).$$

Legyen $k$ a $g'(x)$ felső korlátja, ahol $x \in x_1, x_2$ és ha $|g'(x)| \leqq k < 1$ úgy:

$$|x_3 - x_2| < |x_2 - x_1| \cdot k$$

hasonló elgondolás alapján:

$$|x_2 - x_1| < |x_1 - x_0| \cdot k.$$

Ebből következik, hogy:

$$|x_3 - x_2| < |x_2 - x_1| \cdot k < |x_1 - x_0| \cdot k^2.$$

Általánosságban fogalmazva:

$$|x_n - x_{n-1}| < |x_1 - x_0| \cdot k^{n-1} < |a - b| \cdot k^n, \quad \text{ahol} \quad n \in \mathbf{N} \quad \text{és} \quad k < 1.$$

Legyen $x_p \in [a; b]$ és az $f(x)=0$ egyenletnek az adott intervallumba eső egyetlen gyöke, akkor erre az $x_p$ értékre is érvényes az előző egyenlőtlenség, hiszen $g(x_p)=x_p$. Ezért:

$$|x_n - x_p| < |a-b| \cdot k^n,$$

ahol $a$ és $b$ előre meghatározott érték. Ebből pedig

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_p) = |a-b| \cdot \lim_{n\to\infty} k^n = 0$$

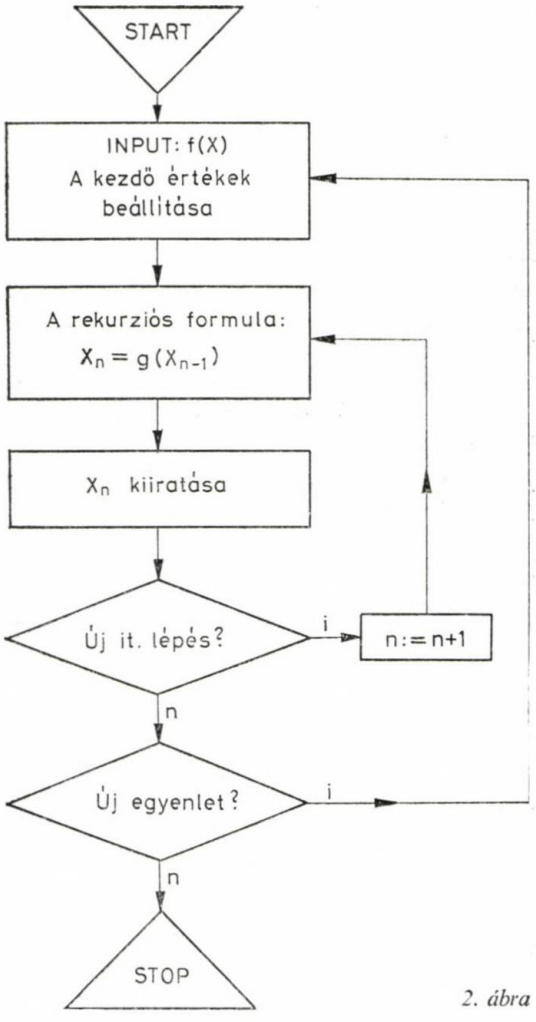
következik, vagyis a sorozat konvergens. Másképpen fogalmazva, elegendő nagy $n$-re $k^n < \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ előre meghatározható érték.

A fenti egyenlőtlenségekből az is következik, hogy minden iterációs lépésnél egyre kisebbé válnak az intervallumok és egyre pontosabb értéket kapunk a gyökre.

Ha viszont $|g'(t)|>1$, akkor az $|x_n - x_{n-1}|$ különbségnek nincs véges határértéke.

A probléma számítógépes megoldására két programot adok meg. Először egy grafika nélküli — csak az algoritmust tartalmazó —, majd egy grafikus megjelenítésű teljes programot is közlök. A nagyfelbontású finom grafika miatt a grafikus programot „ZX Spektrum" számítógépre írtam.

Az első „Spektrumra" írt program tetszés szerinti egyenlet közelítő megoldását kínálja. A program blokkdiagramját a *2. ábra* mutatja.




*2. ábra*

A program a következő:

```
 5 REM Fixpont-iteráció
 6 PRINT AT 1Ø, 5; "FIXPONT-ITERÁCIÓ";
 8 LET n=Ø; PAUSE 1ØØ: CLS
1Ø INPUT "A vizsgált egyenlet: X="; g$:
2Ø INPUT "A kezdő érték: X(Ø)="; X
3Ø LET g=VALg$
4Ø PRINT TAB 4; "X("; n+1; ")="; TAB 1Ø; g; TAB 2Ø; "(=g"; n; ")";
5Ø LET n=n+1
6Ø INPUT "Tovább? (ENTER/N)"; w: IF w=""THEN LET X=g:
   LET g=VALg$: GOTO 4Ø
7Ø INPUT "Új egyenlet? (ENTER/N)"; q: IF q=""THEN LET
   n=Ø: CLS: GOTO 1Ø
8Ø CLS: PRINT AT 1Ø, 14; "V É G E";
```

A program lényegében az elméleti megfontolást követi. A függvény és az első közelítő érték megadása után (1Ø és a 2Ø sor) meghatározza az adott helyen vett függvényértéket ($g$). A 4Ø sorba kiírja az identitás függvény abszcisszáját és a függvény értékét az előző helyen. A további iterációs lépéseket a rekurziós formula felhasználásával határozza meg (6Ø sor). Látható, hogy a program a $g(x)$ függvényt string formájában kéri (1Ø sor) és a 3Ø sorban számmá alakítja.

Érdemes a programot úgy átalakítani, hogy az egy előre megadott $\varepsilon$ értéktől függően határozza meg a számítógép a keresett gyök értékét. Ehhez a programot az alábbi módon alakítjuk át:

```
 8 LET p=2: DIM g (1ØØ): PAUSE 1ØØ: CLS
25 INPUT "A gyök pontossága e="; e;
35 LET g(n)=g: LET X=g
4Ø IF ABS(g(n)-g(n-1))<=e THEN PRINT AT 1Ø, Ø; "A GYÖK: X=";
   g; AT 1Ø, 21; "IT.SZ.="; n-1;
55 GOTO 3Ø
```

A 7Ø sorba n=Ø helyett n=2 írunk; a program többi sora változatlan marad. Lényegében a változtatás abban áll, hogy a függvényértéket a $g(n)$ tömbbe gyűjtjük és a feltétel teljesülésekor íratjuk ki. Az ENTER lenyomásával további értékek is kiírathatók, vagy a kezdő érték megváltoztatható.

A program igen kis változtatással TV-C számítógépre is átírható. Vigyázni kell arra, hogy a gép INPUT-ként stringet nem fogad el! A 1Ø sorba INPUT helyett PRINT-et írunk és beírjuk a függvényt. A 2Ø sorba INPUT PROMPT után írhatjuk az idézőjelet. Ugyanúgy járunk el a következő sorban is. A 3Ø sorba beírjuk LET g=függvény. A sorelmeléshez az 5Ø sorba beírjuk, hogy PRINT. A többi sort nem kell megváltoztatni.

A program futtatásához példaként néhány feladatot ajánlok. Igen szemléletes a $\cos x - x = 0$ egyenlet gyökének fixpont iterációval való keresése. Az identitás függvény felhasználásával az egyenlet a $\cos x = x$ alakot ölti, — amelynek megoldásakor azt a valós értéket keressük a [0; 1] intervallumban —, amelynek cosinusa magával a számmal egyenlő. A program futásakor a 0,5 kezdő értéket választva az első közelítés értéke Ø.87758256. A 45. iterációs lépés után a képernyőn azonos értéket találunk: Ø.739Ø8513. A megjelölt, sőt a $[-1; 1]$ intervallumban is konvergens sorozatot kapunk, hiszen a derivált abszolút értéke kisebb mint egy.

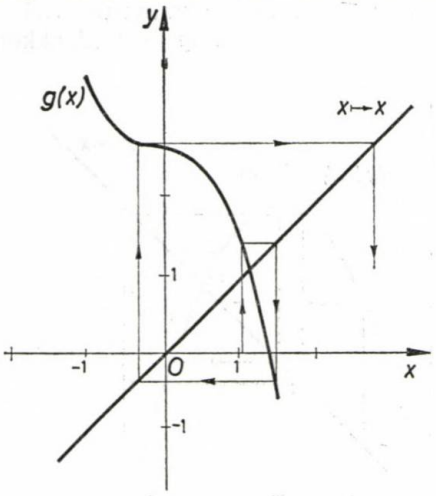
A második feladatként oldjuk meg az: $f(x)=x^2-3=0$ egyenletet. Nyilvánvaló, hogy a várható gyökök irracionálisak; tehát a számítógép számábrázolásától függően kapunk pontos értékű gyököt. Beírva a programba a $g(x)=x^2+x-3=x$ egyenletet, azt találjuk, hogy a várható gyökök környezetében nem kapunk konvergáló sorozatot. Valójában nem teljesül a keresett gyökök környezetében a konvergenciának az a feltétele, hogy függvény meredeksége kisebb legyen, mint egy. A függvény meredeksége csak a $(-1; 0)$ intervallumban csökken a megengedett érték alá, ez pedig kiesik a gyökök környezetéből.

Hogy eredményre vezessen eljárásunk, végezzünk ekvivalens átalakítást az $f(x)=0$ egyenleten úgy, hogy az egyenletet szorozzuk be egy nullától különböző konstanssal. Így egyenletünk $g(x)=c\cdot f(x)+x$ alakú lesz. A konstans értékét úgy válasszuk meg, hogy a függvény meredeksége a feltételnek megfeleljen.

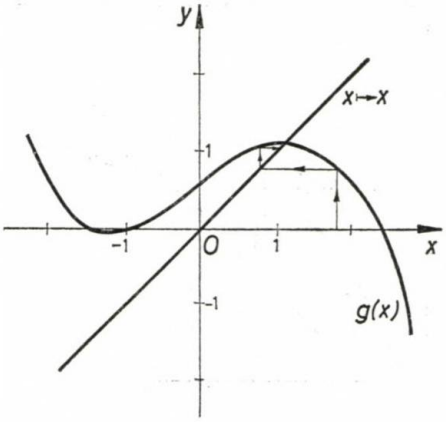
Legyen esetünkben $c=1/12$, vagyis egyenletünk $1/12\cdot(x^2-3)+x=x$ alakú lesz. A $(-13{,}7; \sqrt{3}]$ intervallumban a sorozatok konvergensek lesznek, a $-\sqrt{3}$ gyököt adott pontossággal közelítik meg.

A $c$ értékét $-1/6$-nak véve a $[-\sqrt{3}; 7{,}7)$ intervallumban kapjuk konvergens sorozatokkal a pozitív gyököt.

Oldjuk meg az $x^3+x-2{,}7=0$ harmadfokú egyenletet a valós számok halmazán. Az $f(x)=x^3+x-2{,}7$ függvény szigorúan monoton növekvő; a zárushely az [1,1; 1,2] intervallumban található. Az $x=g(x)$ átalakítás itt sem ad megoldást. A *3. ábrán*




*3. ábra*




*4. ábra*

látható, hogy a $g(x)$ függvény a gyök környezetében igen meredek és bárhogyan választjuk meg az első közelítés értékét, a sorozat divergens lesz. A $c$-t $-1/5$-nek választva egyenletünk az:

$$1/5(-x^3+6x+2{,}7) = x$$

alakot ölti. A baloldal meredeksége jóval egy alá csökken és néhány iterációs lépés után kapjuk az $x=1.1558394$ gyököt.

A következőkben egy olyan programot közlök, amely grafikusan is követi az iterációt. A program a [0; 1,5] intervallumban készíti el a vizsgált és az identitás függvény képét, ezért a gyököt is ebben az intervallumban határozza meg. Inputként megkérdezi a $g(x)$ függvényt, és rajzolás közben kiíratja a változóhoz tartozó függvényértékeket. Megkérdezi az iterációs lépések számát, a gyök első közelítő értékét és a gyök pontosságát. Ezek után grafikusan szemlélteti az egyes iterációs lépéseket és jelzi az $x(n)$ értékeit. Amennyiben kevesebb iterációs lépés is elegendő a gyök adott pontosságú meghatározásához, úgy a program leáll. Az ENTER lenyomása után táblázatot készít az iterációs sorozatról. Demonstrációs célból 7 egyenlet között lehet válogatni; valamennyi egyenlet gyöke a (0; 1) intervallumban található. A programlistában ezek az egyenletek az 1000—1007 sorokban találhatók. A nyolcas sorszám lenyomásakor tetszés szerinti függvényt vizsgálhatunk, amelynek a gyöke az adott intervallumba esik.

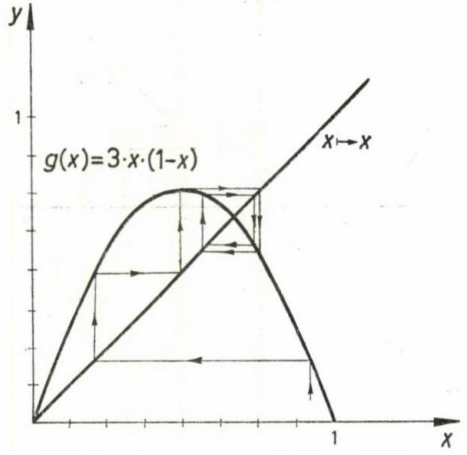
Az egyik legérdekesebb problémát a második egyenlet rejti:

$$f(x) = a \cdot x(1-x)-x = 0.$$

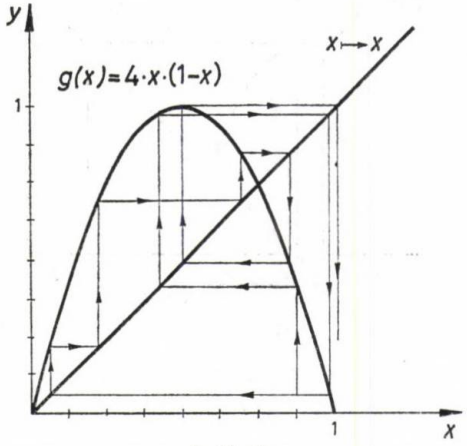
A $g(x)=a \cdot x-ax^2$ függvény képe egy parabola, amely csúcspontjának koordinátája $(0{,}5;\ a/2)$. Ebből is következik, hogy a meredekség az $a$ paraméternek az ún. kontrollparaméternek a függvénye. A függvény zérushelye független a kontrollparamétertől, az $x=0$, illetve az $x=1$ helyen van. Mivel a $g(x, a)=a \cdot x(1-x)$ a [0; 1] intervallumban folytonos, tehát van fix pontja. A grafika miatt a kontrollparaméter

értékét $0<a\leqq 4$ között választhatjuk. A fixpontok koordinátái: (0; 0), illetve $(a-1/a;\ a-1/a)$.

Vizsgáljuk a $g(x)$ függvény meredekségét, mint az $a$ paraméter függvényét. A $g'(x)=a(1-2x)$ és a $|g'(x)|<1$, ha $0<a\leqq 3$. Ily módon, ha az a paraméter értékét $0<a\leqq 1$-nek választjuk, akkor az $x=0$ gyököt közelítjük; ha pedig $1<a\leqq 3$, akkor a gyök sorozat $(a-1)/a$-hoz konvergál.




*5. a) ábra*




*5. b) ábra*

Válasszuk a kontrollparaméter értékét 3,5-nek. Az ábrából jól látható, hogy az iteráció nem konvergens, — néhány lépés után 0,4 és 0,8 között oszcillál, ha a közelítést 0,7-nek választjuk *(5. ábra)*. Hasonló kaotikus sorozatot kapunk az $a=4$ esetében is. A természetben lefolyó nem lineáris jelenségek bizonyos feltételek mellett e matematikai modellhez hasonlóan viselkednek. Ennek kutatása, számítógépes feldolgozása és elemzése napjaink tudományos feladata.

A programlista:

```
 2 REM FIXPONT ITERACIO
 3 REM © SIMON LASZLO
 5 OVER Ø: BORDER 5: INK 2: INVERSE Ø
1Ø LET p$="Fixpont ITERACIO":
GO SUB 9979
11 DIM x(1ØØ): LET k=Ø
12 LET p$="© Simon Laszlo": LET xs=1: LET ys=1: LET n=1: LET
y=17Ø: LET xx=6Ø: GO SUB 9981: PAUSE 2ØØ
13 CLS: LET p$="MELYIK EGYENLET MEGOLDASAT KERI?": LET xs=1:
LET ys=3: LET n=1: LET xx=Ø: LET yy=2Ø; GO SUB 9981: PAUSE 1Ø:
PRINT AT 19, 4; "8. TETSZES SZERINT!"; AT 12, 4; "1. (COS X-X)=Ø";
AT 13, 4; "2. a*x(1-x)-x=Ø"; AT 14, 4; "3. 2↑x-1Ø-x=Ø"; AT 15, 4;
"4. (1/(2↑x))-x=Ø"; AT 16, 4; "5. (1Ø/11)↑x-x=Ø"; AT 17, 4; "6. Ø.5*SQR
x+Ø.2=Ø"; AT 18, 4; "7. x↑x-xØ": LET xa=Ø: LET xb=1
14 INPUT q: IF q<>1 AND q<>2 AND q<>3 AND q<>4 AND q<>5
AND q<>6 AND q<>7 AND q<>8 THEN GO TO 14
15 GO SUB 1ØØØ
2Ø INK 2: BORDER 6: BRIGHT 1
8Ø PLOT Ø, Ø: DRAW 24Ø,Ø
```

```
 90 PLOT 0, 0: DRAW 0, 160
100 FOR p=0 TO 150 STEP 30: PLOT p, 0: DRAW 0, 3: NEXT P
110 PRINT #0; "          0. 5          1"
130 LET dy=120: LET dx=120
140 LET mn=0: LET w=0
150 IF w<mn THEN LET mn=w
160 LET mx=(240)/dx
165 PRINT "y"; AT 21, 28; "x"
170 LET w=(160)/dy
180 IF w<mx THEN LET mx=w
190 PLOT -120*mn, -120*(mn): DRAW 120*(mn+mx), 120*(mn+mx)
210 REM graf
215 PRINT AT 6,0; "1",
240 FOR i=dx*xa TO (dx*xb)+50 STEP 4
250 LET x=i/dx: LET j=dy*VAL f$
255 IF j>=175 THEN LET j=175
256 IF j<=0 THEN LET j=0
257 IF j=0 OR j=175 THEN NEXT i: GO TO 300
260 PLOT i, j
261 PRINT AT 18, 29; "    "; AT 18,22; "    "; AT 7, 15; "x->x";
AT 9, 15; x->"; f$
265 PRINT AT 18, 18; "x="; (INT (100*i/dx))/100; AT 18, 25; "y=";
(INT (100*j/dy))/100
270 NEXT i
300 INK 0
310 INPUT "AZ ITER, LEPESEK SZ, n="; n: IF n<=0 OR n>100 THEN GO
TO 310
315 INPUT "{0.1-0.9} x(0)="; x
316 INPUT "A gyok pontossaga:"; 2
320 LET i=dx*x: LET j=0
321 FOR U=2 TO n
325 IF j<=174 THEN PLOT i, j
330 IF k=0 THEN PRINT AT 10, 18; "x("; k; ")="; INT (100*(i*0.25/30)/100
350 LET x=VAL f$: LET ij=dy*x
352 LET x(u)=(INT (100000*x))/100000
355 INVERSE 1: LET k=k+1: PRINT AT 10, 18; "x("; u; ")="; x(u)
356 INVERSE 0
360 INK 3: DRAW 0, ij-j: LET ji=dx*x
370 DRAW (ji-i), 0: LET j=ij: LET i=ji
372 IF ABS (x(u)-x(u-1))<=e THE N GO TO 385
375 NEXT u
376 INK 1: PRINT #0;"     0.5     1"
380 IF ABS (x(u)-x(u-1))>e THEN PRINT #0; "KEVES A 'IT.' LEPES!"
385 FLASH 1: PRINT AT 2, 25; "(ENTER)"; :FLASH 0: PAUSE 0: CLS: INK 0:
INVERSE 1: PRINT AT 0, 1; "x(n)-nek:";: FOR s=2 TO U-1: INK 3:
INVERSE 1: PRINT TAB 2; "x("; s; ")="; TAB S; x(s);: INVERSE 0
388 NEXT S
390 FLASH 1: PRINT AT 20, 10; "CENTERJ";: FLASH 0: PAUSE 0. GO TO 13
1000 IF q=1 THEN LET f$="COS x"
1001 IF q=2 THEN LET f$="a*x*(1-x)": INPUT "KEREM AZ 'a' ERTEKET:
"; s;
```

```
1002 IF q=3 THEN LET f$="0.5*2↑x-0.5"
1003 IF q=4 THEN LET f$="1/2↑x"
1005 IF q=5 THEN LET f$="(10/11)↑x"
1006 IF q=6 THEN LET f$="0.5*SOR x+0.2"
1007 IF q=7 THEN LET f$="(x↑x)↑x"
1008 IF q=8 THEN INPUT "Kerem a fuggvenyt:"; f$
1100 CLS: LET x S=0: LET xb=1. RETURN
9979 REM ys=betuhossz/xs=betuszel/xx=vizsintesh/yy=fuggh.
9980 LET ys=3: LET n=1: LET xs=1: LET yy=80: LET xx=60
9981 LET i=23306: POKE i, xx: POKE i+1, yy: POKE i+2, xs: POKE i+3, ys:
POKE i+4, 8: LET i=i+4: LET w=LEN p$: FOR n=1 TO w, POKE i+n,
CODE p$ (n): NEXT n: POKE i+w+1, 2 55: LET w=USR 32256
9983 RETURN
9984 STOP
9985 CLEAR 32255: LOAD "bg" CODE USR "a": LOAD "c" CODE 32256,
300: RUN 1
9989 RUN 1: STOP
9990 SAVE "il" LINE 9985
9992 SAVE "bg" CODE USR "3", 168
9994 SAVE "c" CODE 32256, 300
```

A programot részletezve:

A program a cím kiírását nagyított karakterekkel jeleníti meg. A kiírandó szöveg p$-ban van rögzítve (12. sor). A print gépi rutinja a 9979—9983 sorokban van híva. A rutin a 32256 címtől kezdődően, 300 byte hosszon található. A DATA sorokban beírható gépi kódot megtalálhatjuk: *Rucz Lajos: RUTINRÓL—RUTINRA* c. könyvének 110. oldalán. A Spektrum „Demo" kazettáján levő programok ezzel a rutinnal jelenítik meg a nagyított karaktereket. Ezt a következőképpen használhatjuk fel: Gépeljük be a programunkat és mentsük ki kazettára. Vegyük elő a bemutató kazettát és futtassuk a „SIDEB" oldalról a „Wall" programrészt addig, amíg a „Tape then stop" felírás meg nem jelenik. Ezek után töröljük NEW-el a felvett programot és az előzőleg rögzített programot töltsük be. A felírások nagyított karakterekkel jelennek meg.

A program kimentése: RUN 9900 beírásával történik.

13—14 és az 1000 sor a választható egyenleteket tartalmazza.
80—90 sor a koordinátákat rajzolja ki.
110 sor a koordináta beosztásának kiíratása az „input" sorba.
130—260 sor az identitás függvény és a $g(x)$ függvény értékadása és kirajzolása.
310—375 sor értékadás és az iterációs lépések grafikus megjelenítése.
380 sor a gyök pontosságának vizsgálata.
385 sor az $x(n)$-nek kiíratása.

## IRODALOM


J. SZ. BJEZIKOVICS: *Közelítő számítások.* Tankönyvkiadó, 1952.
MAJOR ZOLTÁN: *Egyenletek közelítő megoldása.* Mikroszámítógép Magazin, 1985/4.
LOURICS LÁSZLÓ: *Kaosz a spektrumban.* Mikroszámítógép Magazin, 1986/3.
MARX GYÖRGY: *A természet játékai.* Atom. 1981.
*Matematika.* A matematikai osztályok számára. I. Tankönyvkiadó, 1977.
DR. MATZ LÁSZLÓ: *Rekurzív sorozatok.*
BARTHA G.—KUN PÉTER: *Válogatott fejezetek a matematikából.* Tankönyvkiadó. 1986.
*Kleine Enzyklopädie Matematik.* Leipzig, 1965.
RUCZ LAJOS: *Rutinról—rutinra.* LSI Alkalmazástechnikai Tanácsadó Szolgálat, Budapest, 1986.

RÓKA SÁNDOR
főiskolai tanársegéd
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

# Egypercesek. Feladatok szakkörre

Mottó: „A problémamegoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlás útján lehet... Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar tanulni, annak problémák megoldását kell gyakorolnia."

*Pólya György*

Az „Egypercesek" többnyire valóban egypercesek, legalábbis a megoldások leírása néhány soros. A feladatok alkalmasak a feladatmegoldói rutin mérésére és bővítésére. Megoldásuk többnyire nem a megszokott, már sablonszerűen alkalmazott eljárásokat igényli, ezért alkalmasnak tartom az érdeklődés felkeltésére és a matematika iránt fogékony tanulók felismerésére.

## FELADATOK

**1.** Mennyi a $-10$ és 10 közötti egész számok összege?

**2.** Mennyi a $-10$ és 10 közötti egész számok szorzata?

**3.** Írd fel a legkisebb természetes számot, melyben a számjegyek összege 100.

**4.** Számold ki a 12, 18 és 30 cm oldalú háromszög területét!

**5.** Az $1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2$ összeg páros vagy páratlan?

**6.** Az első száz prímszám összege páros vagy páratlan?

**7.** Adj meg két egész számot, melyek összege is, szorzata is prímszám!

**8.** Adj meg olyan $p$ és $q$ prímszámokat, amelyre $p+q$ és $p-q$ is prímszám!

**9.** Melyik az a legkisebb természetes szám, amely maradék nélkül osztható az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok mindegyikével?

**10.** *a)* Öt egymást követő egész számot összeszorzunk. Az így kapott szám milyen jegyre végződik?

*b)* Öt egymást követő páratlan számot összeszorzunk. Az így kapott szám milyen jegyre végződik?

**11.** Négy egymást követő egész szám szorzata 3024. Melyek ezek a számok?

**12.** Milyen számjegyre végződik az $1!+2!+3!+\ldots+100!$ összeg?

**13.** *a)* Mutasd meg, hogy a $11^9+11^8+\ldots+11+1$ összeg osztható 5-tel!
*b)* Mutasd meg, hogy a $11^{10}-1$ szám osztható 100-zal!

**14.** Adottak az $1-x, 2-x, 3-x, \ldots, 100-x$ számok.
*a)* Számold ki a szorzatukat, ha $x=77$.
*b)* Számold ki az összegüket, ha $x=50{,}5$.
*c)* Mutasd meg, hogy szorzatuk $x=0$-ra és $x=101$-re ugyanaz!

**15.** Számold ki ügyesen!

$$\frac{437^2-363^2}{537^2-463^2}$$

**16.** Mivel egyenlő $96\cdot 104$? Számolj ügyesen!

**17.** Bontsd prímtényezőire 899-et! Számolj ügyesen!

**18.** Számold ki a $100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$ összeget!

**19.** Alakítsd szorzattá!

*a)* $x^4+x^3+2x^2+x+1$; *b)* $x^3+2x^2+2x+1$;

*c)* $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$; *d)* $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$;

*e)* $x^4+x^2+1$; *f)* $x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1$; *g)* $x^4+4$.

*Oldd meg az egyenleteket!*

**20.** $(x+2)\cdot\sqrt{x-1}=0$. **21.** $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=0$. **22.** $(x^3-1)^2+(x^2-1)^4=0$.

**23.** *a)* $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-25}=7$; *b)* $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-25}=\dfrac{35}{x}$.

**24.** *a)* $2^x+3^x=35$; *b)* $2^x+3^x=5^x$. **25.** $x^2+y^2=2x+2y-2$.

**26.** Mennyi a minimuma az $x^2+y^2+2x-4y+6$ kifejezésnek?

**27.** Oldd meg az $x^2\cdot(x+1)>0$ egyenlőtlenséget!

**28.** Hány megoldása van a

*a)* $10\cdot\{x\}=x$; *b)* $\sin x=\lg x$ egyenletnek?

**29.** Mutasd meg, ha $a<b<c$, akkor az

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

egyenletnek van két különböző gyöke!

**30.** $ax^2+bx+c$ minden $x$-re pozitív. Határozd meg $c$ előjelét!

**31.** Az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincs valós gyöke és $a+b+c<0$. Határozd meg $c$ előjelét!

**32.** Mutasd meg, hogy az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek van racionális gyöke, ahol $a, b, c$ az 1, 2, $-3$ számok valamilyen sorrendben!

**33.** Az $x^2+px-6=0$ egyenlet egyik gyöke $x_1=1$. Mekkora $p$? Mekkora a másik gyök?

**34.** Az $x^3+ax^2+bx+6=0$ egyenlet két gyöke 2 és 3. Határozd meg $a$ és $b$ értékét! Mekkora a harmadik gyök?

**35.** Az $x^2+5x+c=0$ egyenletnek van egy pozitív és egy negatív gyöke. Lehet-e $c>0$?

**36.** $x_1+x_2+\ldots+x_{101}=0$, $x_1+x_2=x_2+x_3=\ldots=x_{100}+x_{101}=1$. $x_{17}=?$

**37.** $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Mutasd meg, hogy $a=b=c$.

**38.** $a+b+c=0$. Mutasd meg, hogy $ab+bc+ca\leqq 0$.

**39.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$. Mutasd meg, hogy $a=b=c$.

**40.** Tudjuk, hogy $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$. Mivel egyenlő $x^3+\dfrac{1}{x^3}$?

**41.** Írd fel egyszerűbb alakban az $\left|x-\sqrt{(x-1)^2}\right|$ kifejezést, ha tudod, hogy $x<0$!

**42.** Mutasd meg, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

**43.** Mutasd meg, hogy

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}<3.$$

**44.** Mutasd meg, hogy

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20}}}+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12}}}+\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30}}}<15.$$

**45.** Igazold, hogy

$$\sqrt{101}-\sqrt{100}<\frac{1}{20}.$$

**46.** 190 246 849 és 190 302 025 két egymás utáni páratlan szám négyzete. Határozd meg a köztük levő négyzetszámot!

**47.** Ha $n$ négyzetszám, akkor $n$ segítségével írd fel a következő négyzetszámot!

**48.** Mely $n$ értékekre lesz négyzetszám $n^2+n+5$?

**49.** Két négyzetszám különbsége 100. Melyek ezek a számok?

**50.** Mely $n$ értékekre lesz prím $n^3-n^2+n-1$?

**51.** Melyik szám a nagyobb:

*a)* $2^{100}$ vagy $10^{30}$; *b)* $2^{300}$ vagy $3^{200}$; *c)* $\frac{9999}{10\,000}$ vagy $\frac{10\,000}{10\,001}$?

**52.** Az $ax^2+bx+c$ kifejezés értéke minden egész $x$-re egész szám. Mutasd meg, hogy $2a$, $a+b$, $c$ is egész szám!

**53.** Van-e megoldása az alábbi egyenleteknek?

*a)* $\sin x\cdot\cos x=\sin 60°$; *b)* $\sin x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; *c)* $\sin x\cdot\sin(x+\pi)=\frac{1}{3}$.

**54.** Határozd meg a következő kifejezések értékét!

*a)* $\dfrac{\sin 0°+\sin 1°+\ldots+\sin 90°}{\cos 0°+\cos 1°+\ldots+\cos 90°}=?$

*b)* $\operatorname{tg} 1°\cdot\operatorname{tg} 2°\cdot\operatorname{tg} 3°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 89°=?$

*c)* $\lg\operatorname{tg} 1°\cdot\lg\operatorname{tg} 2°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg} 89°=?$

**55.** Mutasd meg, hogy $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\leqq 1$, ahol $n$ pozitív egész szám!

**56.** Tudjuk, hogy

$$2\cdot f(x)-3\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2,\quad x\neq 0\cdot f(2)=?$$

**57.** Igazold, hogy minden $n$ pozitív egészhez van olyan $m$ pozitív egész, hogy $n\cdot m+1$ összetett szám!

**58.** Mutasd meg, hogy az $\underbrace{111\ldots12}_{1988\text{ db}}\underbrace{111\ldots1}_{1988\text{ db}}$ szám összetett szám!

**59.** Bizonyítsd be, hogy az $\underbrace{111\ldots1}_{81\text{ db}}$ szám osztható 81-gyel!

**60.** Mely $n$ természetes számra lesz $\frac{n+7}{n+2}$ egész szám?

**61.** Egy háromjegyű szám jegyeinek összege egy prímszám négyzete, a jegyek szorzata egy prímszám köbe. Melyik ez a szám?

**62.** Oldd meg az egész számok körében az egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x^3+y^3+z^3 &= 1 \\ xyz &= -16 \end{aligned}\right\}$$

**63.** Mivel egyenlő $[(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2]$, ha $n$ természetes számot, $[x]$ pedig $x$ egész részét jelöli.

**64.** Mutasd meg, ha 13 osztója $(2a+b)$-nek és $(5a-4b)$-nek, akkor osztója $(a-6b)$-nek is!

**65.** Mutasd meg, ha egy tetszőleges háromjegyű számot a szám után újra leírunk, az így kapott hatjegyű szám osztható lesz 13-mal!

**66.** Hány nullára végződik 100!?

**67.** Hány szám van 1000-ig, amely 2-vel sem, 3-mal sem osztható?

**68.** Egy szám 5-tel osztva 3, 6-tal osztva 1 maradékot ad. Mennyi a maradék, ha 30-cal osztunk?

**69.** 327-et és 539-et elosztjuk ugyanazzal a kétjegyű számmal, s mind a kétszer ugyanazt a maradékot kaptuk. Mennyi ez a maradék?

**70.** Egy természetes számról a következőket tudjuk: $n$ kisebb 100-tól, $(n, 35)=5$ és $(n, 72)=2$. Mennyi lehet $n$ értéke? $(a, b)$ az $a$ és $b$ számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

**71.** Az $a, b, c$ természetes számok közül bármely kettőnek ismerjük a legnagyobb közös osztóját: $(a, b)=4$, $(b, c)=10$ és $(c, a)=6$. Add meg a legkisebb számokból álló megoldást!

**72.** Az 1, 2, 3, 4 és egy általad választott számjegy segítségével ezek valamilyen sorrendjével írd fel a legnagyobb 36-tal osztható ötjegyű számot!

**73.** Melyik az a legkisebb természetes szám, melyet 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel vagy 6-tal osztva mindig 1 a maradék, 7-tel osztva pedig 0 a maradék?

**74.** Melyik az a legkisebb természetes szám, melyet ha 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal vagy 7-tel osztunk, rendre az 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 maradékot kapjuk?

**75.** Adj meg 99 egymást követő összetett számot!

**76.** Melyik szám 1987 legkisebb többszöröse, amely 1988-ra végződik?

**77.** Melyik szám 45 legkisebb többszöröse, mely csak 0 és 8 számjegyekből áll?

**78.** Egy számtani sorozat harmadik eleme 7. Mennyi az első öt elem összege?

**79.** Egy mértani sorozat harmadik eleme 3. Mennyi az első öt elem szorzata?

**80.** Az 1, 25, 49 négyzetszámok számtani sorozatot alkotnak. Adj meg három másik négyzetszámot, melyek szintén számtani sorozatot alkotnak!

**81.** Adj meg a síkon 6 polyan pontot, amelyek közül bárhogyan is választunk ki hármat, azok egy egyenlő szárú háromszög csúcsait alkotják!

**82.** Van-e olyan test a kockán kívül, melynek minden oldallapja négyzet?

**83.** Van-e olyan hatszög a síkban, melynek bármely két szomszédos oldala egymásra merőleges?

**84.** Van-e olyan négyszög, amelyet alkalmas egyenes három háromszögre vág szét?

**85.** Adott egy négyzet. Szerkessz kétszer akkora területű négyzetet!

**86.** Harmadold meg a 45°-os szöget!

**87.** Mekkora az $ABC$ háromszög területe, ha a csúcsok koordinátái $A(1; 2)$, $B(7; 3)$, $C(5; 5)$.

**88.** Az $ABCD$ téglalap $AB$ oldalát $E$, $AD$ oldalát $F$ felezi. Az $ECF$ háromszög területe 2 egység. Mekkora a téglalap területe?

**89.** Mekkora az egységkocka egyik csúcsából a szemköztibe vivő legrövidebb út a kocka felszínén?

**90.** Mekkora a 3, 4 és 5 egység oldalú háromszög leghosszabb oldalához tartozó magasság?

**91.** Egy zsákban 11 piros, 8 fehér és 6 fekete golyó van. Hány golyót kell kivenni legalább, hogy biztosan legyen közte

*a)* fehér vagy fekete;
*b)* fehér és fekete;
*c)* két különböző szín;
*d)* valamelyik színből mind;
*e)* két színből mindegyik;
*f)* valamelyik színből három legalább?

**92.** Legalább hány fős az az iskola, ahol biztosan van három diák, akik ugyanazon a napon ünneplik a születésnapjukat?

**93.** Van 10 kulcsunk és 10 hozzátartozó zár. Legrosszabb esetben hány próbálkozásra van szükség, míg minden zárhoz megtaláljuk a hozzátartozó kulcsot?

**94.** Négy autóról leszedik a rendszámtáblákat. Hányféleképpen lehet a négy rendszámtáblát visszatenni, hogy pontosan két tábla kerüljön a helyére? És hányféleképp lehet úgy visszarakni, hogy pontosan három tábla legyen e helyén?

**95.** Egy fiú és egy lány játszik: egy szabályos 24-szögbe felváltva átlókat húznak be úgy, hogy azok nem metszhetik egymást. Az veszít, aki már nem tud átlót berajzolni. Hogyan kell játszani a kislánynak — ő kezdte a játékot — hogy ő nyerjen?

**96.** Egy papírra sorban felírtunk $n$ db mínusz jelet. Két játékos felváltva egy vagy két szomszédos mínusz jelet plusszá változtat. Az győz, aki utoljára tud „lépni". Hogyan kell a kezdő játékosnak játszani, hogy mindig ő nyerjen?

**97.** 1988 asztalitenisszező közt kieséses versenyt szervezünk. Minden forduló után a párokból a győztes jut tovább. Ha egy fordulóban valamelyik játékosnak nem jut ellenfél, úgy ő automatikusan tovább jut. Hány mérkőzést játszanak le, míg megtalálják a legjobb játékost?

**98.** Az autóbuszjegyen 4 vagy 5 lyuk lyukasztásával lehet többféle lyukasztást megvalósítani?

**99.** Egy $n$ oldalú sokszög átlói legfeljebb hány pontban metszik egymást?

**100.** Két egyforma pohár egyikébe bort, a másikba vizet töltünk egyenlő magasságig. Ezután az elsőből kiveszünk egy kanál bort, ezt a vizes pohárba öntjük és jól elkeverjük. Most ebből a keverékből viszünk egy kanálnyit a boros pohárba. Mi a több: az a tiszta bor, ami a vízbe, vagy az a tiszta víz, ami a borba jutott?

## Útmutatások a feladatok megoldásához

**1.** Nulla. **2.** Nulla. **3.** 199 999 999 999. **4.** Nulla.

**5.** Páros. **6.** Páratlan. **7.** 1 és 2. **8.** 5 és 2. **9.** Nulla.

**10.** *a)* Nullára, mert osztható 10-zel.
*b)* Ötre, mert osztható 5-tel és páratlan.

**11.** 3024 nem osztható 5-tel, így a keresett négy szám az 1, 2, 3, 4, vagy 6, 7, 8, 9, vagy 11, 12, 13, 14 lehetne. Az első négy szám szorzata kicsi, a harmadik négy szám szorzata pedig nagyobb 10 000-nél. Válasz: 6, 7, 8, 9.

**12.** Az összeadandók 5!-tól kezdve nullára végződnek, ezért csak az első négy szám utolsó jegyét kell figyelni. Az összeg utolsó számjegye 3.

**13.** *a)* Mindegyik összeadandó utolsó számjegye 1-es.

*b)* $11^{10}-1=(11-1)(11^9+11^8+\ldots+11+1)$.

**14.** *a)* Nulla, hiszen szorzunk nullával.

*b)* Nulla, hiszen mindegyik összeadandónak az ellentettje is előfordul az összegben.

*c)* A szorzat mindkét esetben 100!

**15—18.** Használjuk az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot!

**19.** Csoportosítsunk, illetve alakítsunk ki teljes négyzeteket!

*a)* $(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)$;

*b)* $(x^3+x^2)+(x^2+x)+(x+1)$;

*c)* $(x^4+x^3)+(x^3+x^2)+(x^2+x)+(x+1)$;

*d)* $(x^4+x^3+x^2)+(x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)$;

*e)* $(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$;

*f)* $x^6(x^4+x^2+1)+(x^4+x^2+1)$;

*g)* $(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$.

**20.** $x=1$. Az $y=-2$ hamis gyök.

**21.** $x=-1$. Az $x=1$ hamis gyök.

**22.** Ez az összeg csak úgy lehet nulla, ha mindegyik összeadandó nulla.

**23.** *a)* $x=\pm 5$ gyöke az egyenletnek, s más gyöke nincs, mivel a bal oldalon álló függvény szigorúan monoton.

*b)* $x=5$ gyöke az egyenletnek, s más gyöke nincs, mivel a bal oldalon álló függvény növekszik, a jobb oldalon álló csökken.

**24.** *a)* $x=3$ gyöke az egyenletnek, s más gyöke nincs, mivel a bal oldalon álló függvény monoton.

*b)* $x=1$ gyöke az egyenletnek, s más gyök nincs, ez a $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x=1$ átalakítás után látszik.

**25.** $(x-1)^2+(y-1)^2=0$.

**26.** $x^2+y^2+2x-4y+6=(x+1)^2+(y-2)^2+1$.

**27.** $x>-1$ és $x\neq 0$.

**28.** Grafikus ábrázolásból leolvasható.

**29.** Nézzük meg az egyenlőségjel bal oldalán álló függvény értékeit az $x=a$, $x=b$, $x=c$ helyeken. A kétszeri előjelváltásból következik, hogy a függvénynek két zérushelye van.

**30.** Az $x=0$ helyettesítés adja, hogy $c>0$.

**31.** A feladat szerint az $y=ax^2+bx+c$ függvénynek nincs zérushelye, ezért a parabola vagy az $x$ tengely alatt, vagy fölötte van. Mivel $x=1$ helyettesítésre $a+b+c<0$, ezért az $x$ tengely alatt helyezkedik el, s az $x=0$ helyettesítés adja, hogy $c<0$.

**32.** Az egyenletnek gyöke $x=1$.

**33.** Az $x=1$ helyettesítésből $p=5$. Gyökök és együtthatók közti összefüggésből $x_2=-6$.

**34.** Hasonló az előző feladathoz.

**35.** Gyökök és együtthatók közti összefüggésből $c<0$.

**36.** $x_1=x_3=\ldots=x_{101}$, $x_2=x_4=\ldots=x_{100}$, $51x_1+50(1-x_1)=0$, $x_{17}=-50$.

**37.** Szorozzunk 2-vel, s rendezzük az egyenlőség bal oldalára a kifejezést. Csoportosítás után $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

**38.** $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, így $ab+bc+ca\leqq 0$.

**39.** $k=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$, $a=k\cdot b$, $b=k\cdot c$, $c=k\cdot a$, ezért $abc=k^3\cdot abc$,

$k^3=1$, $k=1$.

**40.** $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right)=0.$

**41.** $|x-\sqrt{(x-1)^2}|=|x-(1-x)|=|2x-1|=1-2x.$ **42.** Szorozzunk $\sqrt{n}$-nel.

**43.** $\sqrt{6}<3,\ \sqrt{6+\sqrt{6}}<3,\ \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}<3,\ \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}<3.$

**44.** $\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20}}}<5,\ \sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12}}}<4,\ \sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30}}}<6.$

**45.** $\sqrt{101}-\sqrt{100}=\frac{1}{\sqrt{101}+\sqrt{100}}<\frac{1}{10+10}.$

**46.** $n^2=\frac{(n-1)^2+(n+1)^2-2}{2}.$ **47.** $n+2\sqrt{n}+1.$

**48.** $n^2+n+5=(n+1)^2$ vagy $n^2+n+5=(n+2)^2.$

**49.** $100=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, ebből $a-b=2$ és $a+b=50.$

**50.** $n^3-n^2+n-1=(n-1)(n^2+1).$

**51.** *a)* $1024=2^{10}>10^3;$ *b)* $2^3<3^2;$

*c)* $\frac{9999}{10000}=1-\frac{1}{10000}<1-\frac{1}{10001}=\frac{10000}{10001}.$

**52.** Végezzük el az $x=0$, $x=1$, $x=-1$ helyettesítéseket!

**53.** Egyiknek sincs megoldása.

*a)* $2\sin\alpha\cdot\cos x=\sin 2x=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}.$

*b)* Ez a szorzat csak úgy lehet 1, ha mindkét tényezője 1, vagy $-1$.

*c)* A bal oldalon álló szorzat $\leqq 0$.

**54.** *a)* $\sin\delta=\cos(90^\circ-\alpha)$ miatt a tört értéke 1.

*b)* $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ helyettesítések és az előző indoklás miatt a szorzat értéke 1.

*c)* Nulla, hiszen szorzunk nullával.

**55.** $\sin^{2n}x\leqq\sin^2x,\ \cos^{2n}x\leqq\cos^2x,\ \sin^{2n}x+\cos^{2n}x\leqq\sin^2x+\cos^2x=1.$

**56.** Végezzük el az $x=2$ és $x=\frac{1}{2}$ helyettesítéseket!

**57.** $m=n+2.$

**58.** $111\ldots12111\ldots1=\underbrace{111\ldots1100}_{1989\text{ db}}\ldots0+\underbrace{111\ldots1}_{1989\text{ db}}=\underbrace{11\ldots1}_{1989\text{ db}}\cdot100\ldots01.$

**59.** $\underbrace{11\ldots1}_{81\text{ db}}=\underbrace{11\ldots1}_{9\text{ db}}\cdot(100\ldots100\ldots01).$ Mindkét tényezőben 9 db 1-es van.

**60.** $\frac{n+7}{n+2}=1+\frac{5}{n+2}.$

**61.** A szorzat $2^3$, $3^3$, $5^3$ vagy $7^3$ lehet. Ha például $2^3$, úgy a keresett szám jegyei valamilyen sorrendben 1, 1, 8 vagy 1, 2, 4 vagy 2, 2, 2. Vizsgáljuk ezek összegét.

**62.** $xyz=-16$ egyenlet megoldásait keressük meg előbb az egész számok körében.

**63.** $3n+1.$ **64.** $a-6b=(5a-4b)-2(2a+b).$

**65.** $\overline{xyzxyz} = \overline{xyz000} + \overline{xyz} = 1001 \cdot \overline{xyz} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}$.

**66.** 24. **67.** $1000 - \left(\left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] - \left[\frac{1000}{6}\right]\right)$. **68.** 13.

**69.** Az a kétjegyű szám, amivel osztottunk, osztja az 539—327 különbséget.

**70.** 10 és 50. **71.** 12, 20 és 30. **72.** 84312.

**73.** A keresett számból vonjunk ki 1-et, az így kapott szám már osztható a 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyikével.

**74.** Adjunk 1-et a keresett számhoz. **75.** $100!+2$, $100!+3$, $100!+4$, ..., $100!+100$.

**76.** Kövessük a szorzás menetét. Így sorra meghatározhatjuk a szorzó utolsó, utolsó előtti stb. számjegyét.

**77.** A keresett 0 és 8 számjegyekből álló szám osztható 5-tel és 9-cel.

**78.** $(7-2d)+(7-d)+7+(7+d)+(7+2d) = 35$. **79.** $\frac{3}{q^2} \cdot \frac{3}{q} \cdot 3 \cdot 3q \cdot 3q^2 = 3^5$.

**80.** Szorozzuk meg az 1, 25, 49 számokat egy tetszőleges négyzetszámmal.

**81.** Szabályos ötszög és csúcsai a köré írt kör középpontja.

**82.** Ragasszunk a kocka mindegyik oldallapjára egy vele egybevágó kockát.

**83.** Van, s ez a hatszög konkáv. **84.** Van, tetszőleges konkáv négyszög.

**85.** A négyzet átlóira a csúcsokban merőlegeseket állítunk. **86.** $15° = 60° - 45°$.

**87.** Vegyük fel a háromszög köré írt téglalapot, melynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. Tudjuk számolni mind a téglalap, mind a belőle elhagyandó háromszögek területét.

**88.** Állapítsuk meg, hogy a téglalap területének hanyadrésze a kimaradó terület.

**89.** Tekintsük a kocka síkhálóját. **90.** A háromszög derékszögű és $t = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{5 \cdot m}{2}$.

**91.** A legrosszabb esetet kell figyelni. **92.** $2 \cdot 365 + 1$.

**93.** Az első kulcshoz tartozó zár megtalálásához elegendő 9 próbálkozás.

**94.** Ha három táblát a helyére tettünk, akkor a negyedik is a helyén van.

**95.** A lány először egy olyan átlót rajzol be, amely két szemközti csúcsot köt össze, majd mindig a fiú által berajzolt szakasz ezen átlóra vett tükörképét rajzolja meg.

**96.** Attól függően, hogy $n$ páros vagy páratlan, a kezdő játékos a két, illetve egy középső jelet változtatja meg, majd „szimmetrikusan" játszik.

**97.** Minden lejátszott mérkőzéshez egy vesztes tartozik, így 1987 mérkőzést játszanak.

**98.** Ugyanannyi, mert párba lehet állítani egymással a 4 és 5 lyukú lyukasztásokat.

**99.** $\binom{n}{4}$, mert ha kiválasztunk 4 csúcsot, akkor meghatároztunk egy metszéspontot.

**100.** Ugyanannyi. Például a borospoharat figyelve, abban a folyadékszint magassága változatlan maradt, így ugyanannyi bor hiányzik, mint amennyi vizet a helyére töltöttünk.

# FELADATOK

*Rovatvezető:* Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

*Beküldési határidő:* a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

**1179.** Melyik a nagyobb az

$$A = \sqrt[1988]{1988} \cdot \sqrt[1989]{1989} \quad \text{vagy a} \quad B = \sqrt[1987]{1987} \cdot \sqrt[1990]{1990}\,?$$

*Varga István, Nagyszalonta*

**1180.** Legyen $S_k$ a $(3k-2)^2$-nél nem nagyobb páratlan, illetve páros négyzetszámok összege aszerint, hogy $k$ páratlan vagy páros. Igazoljuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{n} S_k = \frac{(3n)!}{6^n}.$$

*Újvári Jenő, Tamási*

**1181.** Bizonyítsuk be, hogy az első $n$ pozitív egész negyedik hatványa összegének az ötszöröse osztható az első $n$ pozitív egész négyzetének összegével!

*Bagi Gábor, Barcs*

**1182.** Az $ABC$ háromszög $AD$, $BE$, $CF$ ($D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$) szögfelezői rendre a $P$, $Q$, $R$ pontokban metszik a háromszög köré írt kört. Igazoljuk,

$$\frac{AD}{DP} + \frac{BE}{EQ} + \frac{CF}{FR} \geqq 9.$$

*Deák Imre, Székelyudvarhely*

**1183.** Legyen $E = e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x}$. Mely valós $x$, $y$, $z$ számokra teljesül az

$$\frac{e^x}{\sqrt{E+e^{2x}}} + \frac{e^y}{\sqrt{E+e^{2y}}} + \frac{e^z}{\sqrt{E+e^{2z}}} = \frac{3}{2}\,?$$

*Bencze Mihály, Brassó*

**1184.** Bizonyítsuk be, ha $0 < b < a \in \mathbf{R}$ és $n \geqq 2$ egész, akkor

$$\frac{a-b}{a^{n+1}} < \frac{1}{n \cdot b^n} - \frac{1}{n \cdot a^n} < \frac{a-b}{b^{n+1}}.$$

*Dr. Marosvári Péter, Budapest*

# Feladatmegoldások (1155—1160.)

**1155.** Egy iskola összejövetelt rendez régi diákjainak. Minden évfolyamról megjelenik legalább egy ember. Mindenki azokkal és csak azokkal tegeződik, akik legfeljebb 2 évvel előbb vagy később végeztek nála. Hogyan ültessük le a társaságot egy kerek asztal köré, hogy mindenki tegeződjön a mellette ülőkkel?

*Megoldás:* Ha egyetlen évfolyam diákjai jelennek meg, akkor nincs gondunk a tegeződéssel. Ha több, akkor az egy évben végzettek üljenek egy csoportba, azaz egymás mellé. Ültessük le a páros évben végzetteket növekvő sorrendben a kör egy átmérőjének egyik partjára, míg a páratlan évben végzettek — szintén növekvő sorrendben — üljenek a másik partra. Így az egy oldalon ülők egymás közt nyilván tegeződhetnek, mert pontosan két év van közöttük, de a két oldal találkozásánál ülők is, mert itt az összejövetel két legfiatalabb és két legidősebb évfolyama ül egymás mellett.

*Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest,*
*Sallai István, Zilah*

*Megjegyzés:* Ha három évfolyamnál nincs több jelen, akkor az ülésrend tetszőleges. A fenti ülésrend nem szükségszerű, hiszen például két szomszédos csoport diákjait összekeverhetjük.

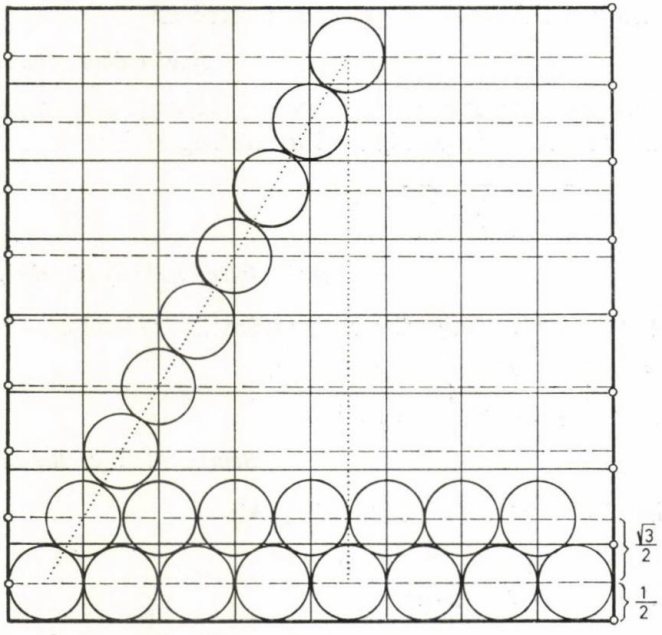
*A megoldók száma: 34.*

**1156.** Az $n$ cm oldalhosszúságú négyzetben 1 cm átmérőjű körlemezeket szeretnénk elhelyezni. Van-e olyan $n$, amelyhez található olyan átfedés nélküli elhelyezés, amelyben a körök száma $n^2$-nél nagyobb?

*Megoldás:* Az első sorba helyezzük el a köröket úgy, hogy azok a négyzet oldalát és egymást is érintsék *(1. ábra)*. Így egy sorba pontosan $n$ darab kört helyezhetünk el. Ha a következő sort is így folytatnák, úgy $n^2$ és nem több kör lenne elhelyezhető az $n$ oldalú négyzetben.

Más elhelyezéssel kell próbálkoznunk! A második sorba úgy tegyük le a körlemezeket, hogy azok másik két kört érintsenek. *(1. ábra)*. Így a második sorba csak $n-1$ darab kör kerül, de a két sor „magassága" 2-nél kisebb. Ugyanis a három, páronként egymást érintő kör középpontja egy egységnyi oldalú szabályos háromszög 3 csúcsa, melynek magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az így elhelyezett két sor kör magassága tehát $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, a magasságcsökkenés

$$2-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$




*1. ábra*

$n$ sor elhelyezésekor $n-1$ sorban nyerhetünk a magasságon, azaz ha

$$(n-1)\,\frac{2-\sqrt{3}}{2}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2},$$

vagyis

$$n\geqq 2\left(2+\sqrt{3}\right)\approx 7{,}464,$$

akkor elfér még egy sor. Ez $n=8$ esetén teljesül, és ekkor a 9 sorban összesen elhelyezett körök száma

$$5\cdot 8+4\cdot 7=68>64=n^2.$$

A feltett kérdésre tehát igenlő választ adhatunk.

*Csepreginé Ambrus Gabriella,*
*Budapest*

*Megjegyzés:* A diszkrét geometria nevezetes tétele, hogy a megoldásban adott elhelyezés valamilyen meghatározott értelemben a legsűrűbb!

*A megoldók száma: 24.*

**1157.** Egy egységtérfogatú tetraéder valamennyi kitérő élpárjának felező pontján át egy-egy (összesen tehát három) síkot fektetünk. Hány részre osztják ezek a síkok a tetraédert és mekkora e részek térfogata?

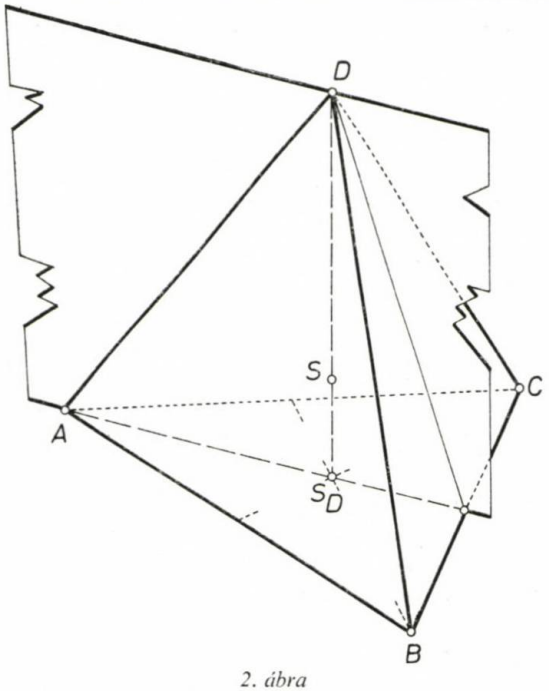
*Megoldás:* Ha egy sík áthalad a tetraéder egyik élén és a szemközti él középpontján, akkor két oldallapot az oldallapok súlyvonalaiban metszi. A feladatban említett síkok tehát tartalmazzák a tetraéder valamelyik súlyvonalát is, hiszen a tetraéder súlyvonala egy csúcson és a szemközti lap súlypontján halad keresztül. A rövidség kedvéért nevezzük ezeket a síkokat súlysíkoknak *(2. ábra)*.

Az áttekinthetőség végett a szóban forgó súlysíkokat két ábrára bontva ábrázoljuk. A *3. ábrán* azokat, amelyek áthaladnak a tetraéder *D* csúcspontján, a *4. ábrán* azokat, amelyek nem tartalmazzák a *D* pontot.

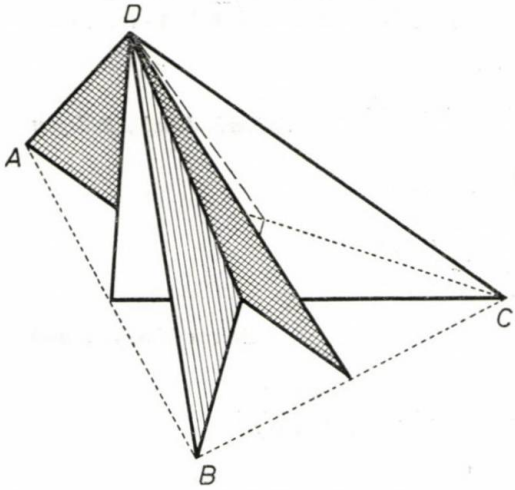
Tudvalevő, hogy a tetraéder súlyvonalai egy pontban (a súlypontban) metszik egymást. (Az ábrákon *S*-sel jelöltük.) Ezért azoknak a síkoknak is, amelyek tartalmaznak egy-egy súlyvonalat, át kell haladniuk a súlyponton. Vagyis: a hat súlysík egy pontban (a tetraéder súlypontjában) metszi egymást.

A tetraéder súlypontja a súlyvonalakat a csúcstól számított 3:1 arányban osztja.

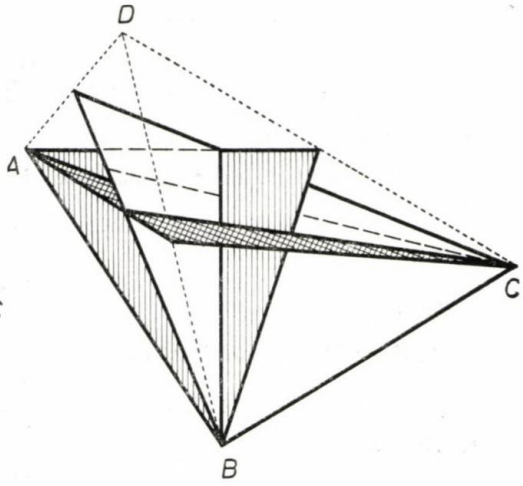
Ezért az *ABCS*, *ABDS*, *ACDS* és *BCDS* tetraéderek bármelyikének térfogata az *ABCD* tetraéder térfogatának $\frac{1}{4}$-e (hiszen négyszer kisebb súlyvonalhoz négyszer kisebb magasságméret és




*2. ábra*




*3. ábra*




*4. ábra*

— azonos alapok mellett — négyszer kisebb térfogat is tartozik). Tehát az említett résztetraéderek térfogata egyenlő $\left(\frac{1}{4}\right)$.

Az előbb említett résztetraéderek bármelyikét egy eredeti tetraéder-lap és három súlysíknak a súlyvonalakig terjedő háromszöge határolja. (Az *5. ábra*, l. a borítókon, az *ABCS* résztetraédert ábrázolja, amelyet az *ABC* lap és az *ABS*, *BCS*, *ACS* súlysíkrészek határolnak.) A fennmaradó három súlysík ezt a rész-tetraédert további hat — egyenlő alapterületű, tehát egyenlő térfogatú — tetraéderre osztja fel. (Az utóbbi három sík az eredeti tetraéder-lapot a lapháromszög súlyvonalaiban metszi, és ismeretes, hogy a súlyvonalak bármelyik háromszöget 6 egyenlő területű háromszögre osztják fel.)

A feladatban említett síkok tehát az egységnyi térfogatú tetraédert 24 darab $\frac{1}{24}$ térfogategységnyi (tehát egyenlő térfogatú) tetraéderre darabolják.

*Horváth Géza, Zseliz*

*A megoldók száma: 21.*

**1158.** Legyen $S_n=\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{i}]$. Melyik az az $n$ egész, amelyre $|n-S_n|$ minimális?

([$x$] az $x$-nél nem nagyobb valós számok legnagyobbikát jelöli.)

*Varga István, Nagyszalonta*

A kitűzött feladatban nyilvánvaló nyomdahiba van. (Sajnos nem, az én hibám! *A rovatvezető.*) Az $x$-nél nem nagyobb valós számok legnagyobbja maga az $x$. Erre fölösleges lenne egy jelölést bevezetni. Itt $x$ a megszokott egész részt jelentheti, vagyis az $x$-nél nem nagyobb EGÉSZ számok legnagyobbikát. Így értelmezve a feladat *megoldása:*

Jelöljük az $|n-S_n|$-t $A_n$-nel. Mivel $S_n=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\ldots+[\sqrt{n}]$, ezért ha $n=1$, akkor $A_n=0$. Ha $n=2$, akkor $A_n=0$. Ha $n=3$, akkor $A_n=0$.

Megmutatjuk, hogy $A_n$ szigorúan monoton növekvő, ha az $n>3$ egészekre vizsgáljuk. Ezáltal nemcsak azt látjuk be, hogy az $n=1, 2, 3$ helyeken van minimuma, hanem azt is belátjuk, hogy máshol lokális minimuma sem lehet.

Tudjuk a következőket:

(1) Ha $i>3$, akkor $[\sqrt{i}]>1$.

(2) $|a-b|=|b-a|$ minden $a$ és $b$ esetén igaz.

(1)-ből következik:

(3) ha $i>3$, akkor $i<S_i$.

(2) és (3) felhasználásával:

(4) $|i-S_i|=|S_i-i|=S_i-i$.

A szigorúan monoton növekedéshez elegendő megmutatni, hogy $A_{i+1}>A_i$. (1)-et alkalmazva $[\sqrt{i+1}]>1$ teljesül. Adjuk ennek mindkét oldalához az $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\ldots+[\sqrt{i}]-1-i$ összeget, (4)-et alkalmazva kapjuk:

$$A_{i+1}>A_i.$$

Így a feladatot megoldottuk, az $n=1, 2$ és 3 a keresett egészek.

*Számadó László, Budapest*

*A megoldók száma: 21.*

**1159.** Oldjuk meg a valós számhármasok halmazán az

$$\frac{1}{2}+\ln(1+x^2)=\frac{\cos y}{1+\cos y},$$

$$\operatorname{ch} y=|z-1|e^{-z}$$

egyenletrendszert!

*Bencze Mihály, Brassó*

*Megoldás:* Első egyenletünket rendezve:

$$\ln(1+x^2)=\frac{\cos y}{1+\cos y}-\frac{1}{2},\quad \ln(1+x^2)=\frac{\cos y-1}{2(1+\cos y)}$$

adódik. Ebből

$$x^2=e^{\frac{\cos y-1}{2(1+\cos y)}}-1.$$

Mivel $x^2 \geqq 0$, ezért

$$e^{\frac{\cos y-1}{2(1+\cos y)}} \geqq 1$$

kell legyen. Az $e^x$ függvény szigorúan monoton volta miatt $\frac{\cos y-1}{2(1+\cos y)} \geqq 0$-nak kell teljesülnie. $\cos y \neq -1$, a nevező pozitív, ezért $\cos y - 1 \geqq 0$. Ebből $y = 2\pi k$ ($k$ egész), s ekkor $x = 0$. Vizsgáljuk most a második egyenletet! A bal oldal: $\operatorname{ch} y \geqq 1$, minden $y$-ra. Bebizonyítjuk, hogy $|z-1|e^{-|z|} \leqq 1$ teljesül minden valós $z$-re. Ez azt jelentené, hogy

$$(*) \qquad e^{|z|} \geqq |z-1|.$$

Elegendő lenne belátni, hogy $z > 0$ esetén $e^z > z+1$. Ez viszont következik az alábbiakból: $\frac{e^z-1}{z}$ az $e^z$ függvény grafikonjának a (0; 1) és a ($z$; $e^z$) pontjait összekötő húr meredeksége, ami $e^z$ szigorúan növekvő volta miatt nagyobb, mint a (0; 1) pontban húzható érintő meredeksége, ami $e^0 = 1$. A (*) egyenlőtlenségben $z = 0$ esetén egyenlőség áll. Ezek szerint $\operatorname{ch} y = |z-1|e^{-|z|}$, ha $y = 0$, $z = 0$.

Eredeti egyenletünket tehát csak (0; 0; 0) számhármas elégítheti ki, s az megoldás is.

*Csorba Ferenc, Győr*
*Kirchnerné Kondor Judit, Budapest*

*A megoldók száma: 25.*

**1160.** Az $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényt az

$$x \mapsto 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos(\sqrt{2}x) - B\sin(\sqrt{2}x)$$

definiálja ($a$, $b$, $A$ és $B$ valós számok). Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy minden valós $x$-re $f(x) \geqq 0$ legyen?

*Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely*

*Megoldás:* Tekintsük az alábbi átalakítást:

$$c \cdot \sin(\varphi + x) = c \cdot \sin\varphi \cdot \cos x + c \cdot \cos\varphi \cdot \sin x.$$

Vezessük be az $a := c \cdot \sin\varphi$, $b := c \cdot \cos\varphi$ jelöléseket. Kimondhatjuk: érvényes az alábbi átalakítás:

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c \cdot \sin(\varphi + x),$$

ahol

$$c = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

(Ha $b = 0$, akkor ez az átalakítás felesleges.) Hasonlóan felírható:

$$A \cdot \cos(\sqrt{2}x) + B \cdot \sin(\sqrt{2}x) = C \cdot \sin(\psi + \sqrt{2}x),$$

ahol

$$C = \sqrt{A^2+B^2}, \quad \psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}.$$

Megmutatjuk, hogy a keresett szükséges és elégséges feltétel a következő:

$$(1) \qquad \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{A^2+B^2} \leqq 1.$$

Először lássuk be az elegendőséget: ha (1) fennáll, akkor

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x + A \cdot \cos(\sqrt{2}x) + B \cdot \sin(\sqrt{2}x) \leqq 1.$$

$$|a \cdot \cos x + b \cdot \sin x + A \cdot \cos(\sqrt{2}x) + B \cdot \sin(\sqrt{2}x)| \leqq |a \cdot \cos x + b \cdot \sin x| +$$

$$+ |A \cdot \cos(\sqrt{2}x) + B \cdot \sin(\sqrt{2}x)| = \sqrt{a^2+b^2} \cdot |\sin(\varphi + x)| +$$

$$+ \sqrt{A^2+B^2} \cdot |\sin(\psi + \sqrt{2}x)| \leqq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{A^2+B^2} \leqq 1.$$

A feltétel szükségességéhez azt mutatjuk meg, hogy ha az $a$, $b$, $A$, $B$ valós számokra nem áll fent az (1) feltétel, azaz

$$(2) \qquad \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{A^2+B^2} = 1+p \quad (\text{ahol } p > 0),$$

akkor található olyan $x(\in \mathbf{R})$, hogy

$$a\cdot\cos x+b\cdot\sin x+A\cdot\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)>1,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\varphi+x)+\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\psi+\sqrt{2}x)>1. \tag{3}$$

Különböztessünk meg két esetet

*a)* Van olyan $x=x_0$, amelyre

$$\sin(\varphi+x_0)=1 \quad \text{és} \quad \sin(\psi+\sqrt{2}x_0)=1,$$

ebben az esetben (2)-ből tüstént következik (3).

*b)* Ha a fenti tulajdonságú $x_0$ nem létezik, akkor is igaz a következő: bármely $\varepsilon(>0)$-hoz található olyan $x_1$ és $x_2$, hogy

$$|x_1-x_2|<\varepsilon \quad \text{és} \quad \sin(\varphi+x_1)=1, \quad \sin(\psi+\sqrt{2}x_2)=1.$$

(Szemléletesen: a két függvény maximum-helye tetszőlegesen közel lehet egymáshoz.) Ennek az állításnak helyessége következik az **1106.** feladatra adott megoldásomból (lásd: MaTa 1986/2. szám, 64—65. oldal).

Ezzel az állítással ekvivalens: előre adott $\varepsilon(>0)$-hoz található olyan $x_0$, hogy

$$\sin(\psi+\sqrt{2}x_0)=1 \quad \text{és} \quad \sin(\varphi+x_0)\geqq 1-\varepsilon.$$

$\varepsilon$-t válasszuk úgy, hogy a (2)-ben definiált $p$-vel $\varepsilon\leqq\frac{p}{1+p}$ álljon és vizsgáljuk (3)-at az $x_0$ helyen:

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\varphi+x)+\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\psi+\sqrt{2}x)\geqq\sqrt{a^2+b^2}\cdot(1-\varepsilon)+\sqrt{A^2+B^2}\geqq$$

$$\geqq\sqrt{a^2+b^2}\left(1-\frac{p}{1+p}\right)+\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{1+p}+\sqrt{A^2+B^2}>$$

$$>\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{1+p}+\sqrt{A^2+B^2}\cdot\frac{1}{1+p}=\frac{1}{1+p}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{A^2+B^2}\right)=\frac{1}{1+p}\cdot(1+p)=1,$$

ezzel igazoltuk, hogy (2)-ből következik (3).

*Kamarás Lajos, Pécs*

*A megoldók száma: 9.*

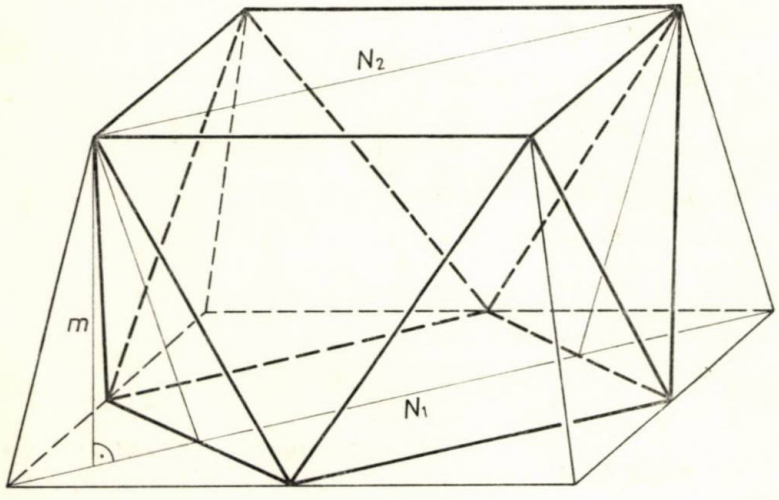
## A megoldók névsora (1155—1160.)

Bagi Barnabás, Barcs (1157.); Bagi Gábor, Barcs (1155., 1157.); Barabás Sándor, Nyírbátor (1155—1160.); Barta László, Nógrádmegyer (1157.); Bencze Mihály, Brassó (1155., 1158—1160.); Boda Miklós, Pécs (1159.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1155., 1156., 1158.); Csorba Ferenc, Győr (1155., 1156., 1158., 1159.); Dályay Pál, Marosvásárhely (1155—1160.); Görbe László, Budapest (1155., 1156., 1158., 1159.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1155—1159.); Hajdú Ferenc, Nagykálló (1155., 1156.); Haina János, Pécs (1155., 1156., 1158., 1159.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (1155., 1159.); Horváth Géza, Zseliz (1155—1157.); Kamarás Lajos, Pécs (1155—1160.); Karsai Bálint, Nagyigmánd (1155.); Kertész Péter, Marosvásárhely (1155—1159.); Kirchnerné Kondor Judit, Budapest (1159.); Kiss Géza, Kisújszállás (1155—1160.); Kiss Zoltán, Pécs (1156., 1157., 1159., 1160.); Kovács Béla, Szatmár (1155., 1157., 1159.); Kováts Péter, Kaposvár (1155., 1158.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1155—1159.); Merényi Imre, Börvely (1158., 1159.); Mészáros József, Galánta (1155., 1158., 1159.); Nyírő László, Mezőkövesd (1155., 1156., 1158., 1159.): Sallai István, Zilah (1155—1157.); Simon József, Csíkszereda (1155—1157.); Steierlein István, Balatonfüred (1155., 1157—1159.); Sütheő Cecília, Szombathely (1155.); Számadó László, Budapest (1155., 1156., 1158.); Szenkovits Ferenc, Székelyudvarhely (1155—1160.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (1155., 1157—1159.); Szigeti Béláné, Győr (1155.); Tóth Sándor, Sárospatak (1155—1159.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1155—1160.); Váradi József, Gelence (1155—1157.); Varga István, Nagyszalonta (1158., 1159.); Zalán Péterné, Budapest (1155.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1155., 1156., 1159.).

**Ára: 7,— Ft**

# A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata




1988. XXXV. évfolyam 3 szám

# A MATEMATIKA TANÍTÁSA

## A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY FATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-2167 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

**ISSN 0461—3902**

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
*a)* személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

*Takács Gábor—Takács Gáborné:* A tanulói motiváció erősítése az alapfokú matematika tanításában ..... 65
*Dr. Hajnal Imre:* Egy tanmenetjavaslat a gimnáziumok I. osztályai számára ..... 75
*Rácz János:* Trigonometriai azonosságok igazolása elemi geometriai úton ..... 78
*Mihajlik Iván:* A hozzárendelési szabály és a függvény fogalma ..... 85
*Róka Sándor:* Miért nem lehet? Feladatok szakkörre II. ..... 88
FELADATOK ..... 91

СОДЕРЖАНИЕ

*Такач Габор — Такач Габорне:* Усиление мотивации ученика в начальном преподавании математики ..... 65
*Д-р Хайнал Имре:* Рекомендуемый учебный план для первых классов гимназии ..... 75
*Рац Янош:* Доказательство тригонометрических тождеств элементарными геометрическими методами ..... 78
*Михайлик Иван:* Правило соответствия и концепт функции ..... 85
*Рока Шандор:* Почему невозможно? Задачи на кружок II ..... 88
ЗАДАЧИ ..... 91

INHALT

*Takács, Gábor—Frau Mária Takács* (geb.: *Prohászka*): Die Verstärkung der Motivation der Schüler in der Grundstufe des Mathematikunterrichts ..... 65
*Dr. Hajnal Imre:* Ein Vorschlag zum Unterrichtsgang für die I. Klassen der Gymnasien ..... 75
*Rácz, János:* Verifizierung trigonometrischer Identitäten auf planimetrischem Wege ..... 78
*Mihajlik, Iván:* Der Begriff der Zuordnungsregel und der Funktion ..... 85
*Róka, Sándor:* Warum ist es unmöglich? Aufgaben für Fachzirkel II. ..... 88
AUFGABEN ..... 91

TAKÁCS GÁBOR—TAKÁCS GÁBORNÉ
középiskolai tanár általános iskolai tanár
Budapest Budapest

# A tanulói motiváció erősítése az alapfokú matematika tanításában

Társadalmunk valamennyi fontos célja valamilyen módon és formában kapcsolatban van az oktatással. Az oktatás, a nevelés lényegében kiterjed az egész lakosságra, de legszervezettebb módon az ifjúságra. Tudatában kell lennünk, hogy ez a tény döntően meghatározza az ifjúságnak, a jövő nemzedékének fejlődését. Ugyanakkor az oktatás komplex folyamata egyaránt szolgálja a termelőerők legfontosabbikának, az ember képességeinek fejlesztését, kibontakozását, a társadalom osztályszerkezetének változtatását, a szocialista társadalmi tudat kialakítását, erősítését, a szocialista életforma, a tartalmas emberi élet megteremtését.

Napjainkban — amikor hazánkban is kezd kibontakozni a tudomány termelőerővé válásának folyamata, amikor létérdekünk, hogy felzárkózzunk a fejlett termelőerőkkel rendelkező országokhoz — az oktatásnak még döntőbb szerepe van a termelőerők fejlesztésében, tökéletesítésében. Kiemelt politikai feladataink között nem véletlenül szerepel az oktatás fejlesztése, a mind szélesebb munkásrétegekre kiterjedő továbbképzés, átképzés. Hiszen a „gazdasági-társadalmi kibontakozás programjának sikeres végrehajtása nagyobb szakképzettséget, széleskörű műveltséget igényel. Oktatási rendszerünk minőségi fejlesztése alapozza meg ezeketaz igényeket. A változó szükségletekre igazodjon a szakképzés szerkezete, emelkedjen a középiskolát, hosszabb távon a felsőfokú tanulmányokat végzettek száma". [1] Viszont megfelelően alapozott matematikai készségek nélkül a sikeres helytállás kevés műszaki, illetve gazdaságszervező életpályán képzelhető el.

Nehéz lenne olyan pedagógust találni, aki tagadná, hogy a tanulás eredményessége, illetve eredménytelensége leginkább a tanulásra ösztönző motívumoktól, a tanulás során kifejtett tevékenység minőségétől (amelyet a tanulói motiváció nagymértékben befolyásol), valamint a tanulás következményeként a tanuló számára realizálható perspektívától függ. Ez a perspektíva, amelyen az egyén számára a tanulásra befektetett munka eredményeként a társadalom által esetlegesen biztosított előnyöket értünk, elég bizonytalan. A társadalom valóságos viszonyainak alakulását mindig követi az egyes emberek és a társadalom számára is fontosnak tartott anyagi és tárgyi, intellektuális, művészeti és erkölcsi értékek tartalmának, egymáshoz viszonyított jelentőségének változása az életcélok megfogalmazásakor, kitűzésekor és megvalósításakor. Manapság, amikor a rövid (esetleg közép) távon realizálható gazdasági eredmények produkálása a magyar társadalom egyik legfontosabb feladata, méginkább erősödik a tárgyiasult formában jelentkező értékek szerepe. A kialakult béarányok egyértelműen alulértékelik az intellektuális tevékenységet, ami nem használ a tudás, a tanulás presztízsének. Mindezek mellett még kifejezetten pedagógiai hátrányt

eredményez a matematikának, mint tantárgynak az az általánosan elterjedt értékelése, amely főleg laikusok, gyengén teljesítő tanulók szüleinek részben önigazolást kereső véleményén alapszik. Pedig a tanulók matematikai képességeinek pszichológiai vizsgálatai [2] arra utalnak, hogy „...nem létezik matematikai antitalentum, valamiféle matematikai vakság. Minden normális és egészséges pszichikumú tanuló képes arra, hogy megfelelő oktatással a matematika anyagot elsajátítsa, és legalább a középiskolai tantervi anyag követelményeihez szükséges ismereteket és készségeket megszerezze". Csakhogy, minden tevékenység (így a tanulás) eredményességére vitathatatlanul hatással van az a tény, hogy önként és örömmel vagy netán kényszerből végzi az ember. Ezek (mármint a fenti) gondolatok késztettek bennünket arra, hogy a tanulói motiváció erősítésének lehetőségeivel, foglalkozzunk. Természetesen tudatában vagyunk annak az aligha vitatható ténynek is, hogy az említett tényezők szinte meghatározzák, de legalábbis nagymértékben befolyásolják a pedagógus munkavégzésének színvonalát, hatékonyságát is.

A tantárgyhoz való kötődés elválaszthatatlan a szaktanár személyétől. Nehezen ébreszthet lelkesedést a pedagógus, ha ő maga nem lelkesedik. A tudás, az iskola, a tanulás, a tantárgya iránt annál nagyobb lelkesedést a tanítványaitól egyetlen pedagógus sem várhat, mint amennyi az ő viselkedésén észrevehető, mint amennyire ő lelkesedik. A nevelőhatás szempontjából egyformán fontos a tanár szakmai-módszertani tudása és emberi magatartása. A tanulók nemcsak a tanártól, hanem — mint modellen — a tanár viselkedéséből is tanulnak. Anélkül, hogy ez tudatos lenne, a tanulók gondolkodásmódot, értékítéleteket, magatartási mintákat is átvesznek tanáraiktól. Nem véletlen ez, tudja is minden pedagógus vagy legalábbis sejti.

A tanulás és a tanítás problémáinak döntő többsége pszichológiai probléma. Az eredményes nevelői tevékenységhez alapos pszichológiai, szociológiai, szociálpszichológiai, pedagógiai kulturáltság szükséges. Ez még akkor is igaz, ha elismerjük (és miért ne tennénk?) az egyéniség hatásának jelentőségét. Ancsel Éva szavaival „...nincs az a pedagógiában való járatlanság, amely megakadályozhatná, hogy egy ember meggyőződése, ha erős és szenvedélyes, hatással ne legyen másokra." [3] Minden pedagógus hat a tanítványaira, de nem egyforma eredményességgel. Közismert, hogy milyen sok és sokféle hatás éri a fiatalokat. Ahhoz, hogy az igen nagyszámú hatás közül a pedagógusé ne csak az egyik legyen, hanem modellálló, személyiségformáló szerepét is betöltse, *egyéniségének varázsa* is szükséges.

Sajnos, a tanulás pszichológiájával, a megértés jelenségével foglalkozó vizsgálatok eredményei az iskolában még ritkán hasznosulnak a megkívánt szinten. Kárteszi professzor szavaival: „Az értelmet fejlesztő eljárások ma is a hagyományokon és az oktatók egyéni véleményein alapulnak — mind az iskolában, mind az egyetemen — tudományos ismeretek helyett." [4] A pedagógus személyiségének orientáló szerepére, a tanári elvárásnak, a tanárok értékelési stratégiájában mutatkozó különbségeknek a tanulók motivációjára, a tanulók teljesítményének alakulására vonatkozó vizsgálatok eredményei arra mutatnak, hogy „a tanulók összehasonlítási alapként, normatív mérceként maguk is átveszik a pedagógus, illetve a tanulótársaik értékelési mintáit önértékelésük, illetve attitűdjeik alakításával." [5]

A tanulói motiváció kialakítása, erősítése, fenntartása nehezen képzelhető el kedvező tanár—diák viszony nélkül, amelynek kialakulásában, fenntartásában a tanári személyiségnek döntő szerepe van. Gyakran a problémaszituáció megoldásához szükséges erőfeszítést, az érdeklődés kiváltásától a megoldás ellenőrzéséig elegendő késztetést a tanulók csupán az iskolai siker, a pedagógushoz

kötődés motívumaiból nyerik. Ezért a tanulók számára szimpatikus tanári személyiség a tanulás eredményességére pozitív hatással van. A számukra szimpatikus pedagógus óráját várják a tanulók. Az órán a tanulók érdeklődése, figyelme, a rend biztosított, a tanulók a követelmények teljesítésében együttműködőek. Az ilyen tanári személyiség legfontosabb jellemzője a gyerekek irányában jóindulattal, figyelemmel, megértéssel és szeretettel kísért, de teljesítést igénylő tanári elvárás, az igazság maradéktalan képviselete minden vonatkozásban, példamutatás a pedagógus önmagával szemben támasztott követelményeiben, az órákra történő felkészülésben, az órák mintaszerű levezetésében.

Minden pedagógus tudja, hogy milyen jelentősége van a tanítási órák légkörének. Ha a tanulók szeretik a matematikát, érzik fontosságát, akkor képességeiknek megfelelően dolgoznak. A fegyelmezetlenség kialakulásának legtöbbször az az oka, hogy a tanulók nem képességeikhez igazodó feladatot kapnak. A túl könnyű és a túl nehéz feladat egyaránt oka lehet az üresjáratok kialakulásának, a tanulói motiválatlanságnak. Nyilván nem lehet minden tanuló legkedvesebb tantárgya a matematika, legkedvesebb tanárja a matematikatanár. Nem lehet minden tanulótól azonos teljesítményt elvárni, de még „kipréselni" sem. Nagyon nehéz annak megállapítása, hogy egy-egy tanuló alacsony teljesítménye milyen mértékben függ össze képességbeli vagy a terhelést nem bíró fiziológiai problémákkal, milyen mértékben függ össze a magatartási és a munkához való rossz viszony problémáival, illetve milyen mértékben magyarázható a tanuló motiválatlanságával. Közismert, hogy a kimagasló értelem is meddő maradhat, ha birtokosa apatikus, következetlen, ambíció és szorgalom nélküli. A motiváltság erőssége tanítványaink személyisége alakulásának döntő tényezője. A képességek mellett a motiváció, a magatartás hatékonyságának legfontosabb tényezője. Meghökkentő különbségeket tapasztalhatunk a hasonló képességű (szándékos, hogy nem az egyenlő adottságúakat hasonlítjuk össze), de eltérően motivált tanulók teljesítménye között. Ezért mindaddig, amíg a nevelő nem veszi figyelembe a tanuló érdeklődését, törekvéseit, vágyait, nem igyekszik (vagy nem képes) ezeket konstruktív irányba befolyásolni, tevékenysége nehezebb lesz, sőt esetenként károkat is okozhat, veszélyessé is válhat.

A tanulás, a matematika tanulása is, alapjában véve képességfejlesztés. A képességek viszont csak a megfelelő tevékenységek gyakorlása során alakulnak ki. Ez erőfeszítés nélkül elképzelhetetlen. Csakhogy tartós erőfeszítéshez megfelelő motiváció szükséges. A tanuló tevékenységének motívumai a tevékenység következtében, annak folyamatában is fejlődnek. Nyilván a motívumok fejlődésével együtt maga a tanuló személyiség is fejlődik. Nem véletlen, hogy pedagógiai gyakorlatunk szállóigéjévé vált az a mondás, hogy „a fejlődés alapfeltétele a tevékenykedés". A matematikatantárgy vonatkozásában azt azért hozzá kell tennünk, hogy intellektuális értelemben is értendő a tevékenykedés. Az igazi fejlődés, művelődés (ellentétben a közfelfogásban elterjedt, „közönségként" való szemlélődéssel) az a tevékenység, amikor az ember problémát — problémákat old meg eredményesen. Közismert, hogy „az ember átlag 20%-át jegyzi meg annak, amit hall, 30%-át annak, amit lát, 50%-át annak, amit lát és hall, 70%-át annak, amit önmaga mond és 90%-át annak, amit csinál." [6] Meggyőződésünk, hogy a tanári magyarázatnak, illetve a tanulótársak megoldása meghallgatásának és megfigyelésének lényegesen kisebb jelentősége van az egyén gondolkodásának fejlődésében mint az önálló feladatmegoldáson alapuló tevékenységnek.

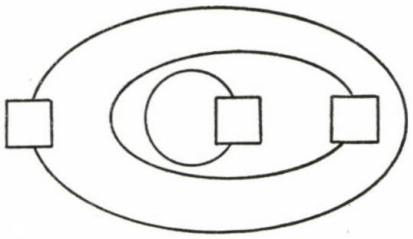
A matematikatanítás egyik legfontosabb feladata az önálló, problémamegoldó gondolkodásra nevelés. Önálló prob-

lémamegoldásra viszont csak úgy nevelhetünk, ha elegendő alkalmat biztosítunk a tanulóknak önálló gondolkodásra, önálló problémafejtésre. Ezért célszerű növelni az önálló feladatmegoldások számát. Viszont egy-egy osztályban a tanulók tantárgyi készségének szintje, jártassága legtöbbször éppúgy heterogén, mint pszichikus tulajdonságaik, biológiai fejlettségük. Több évtizedes pedagógiai tapasztalataink alapján nyugodtan kijelenthetjük, hogy a tanulók egyéni sajátosságainak figyelembevétele nélkül a képességfejlesztés területén nem lehet komolyabb eredményeket elérni. Mindig ügyelni kell az egyéni különbségekre, nem szabad uniformizált eljárásokhoz ragaszkodni, hanem a különböző pszichikus alkatú tanulóknál különböző, belső sajátosságaiknak megfelelő módszert kell alkalmazni. Differenciált feldolgozási módszereket, változatos tanítási-tanulási stratégiát, a különböző képességű tanulók ismeretszintjéhez igazodó, különböző nehézségi fokozatú feladatok kitűzését, különböző tanulóknak ugyanazon feladat megoldásához különböző időtartam biztosítását, sokfajta didaktikai fogás alkalmazását tartjuk célszerűnek. Nyilván a tanulók egyéni sajátosságai figyelembevételének ilyen „rugalmas igazodást" feltételező tanítási stratégiája esetén már a tanítási órák tervezésének időszakában sem kezelhető kizárólagos célként a konkrét matematikai tartalom elsajátítása. Sőt ez a szemlélet feltételezi, hogy a matematikai tartalom nem elkülöníthető célként jelentkezik, hanem csak egy olyan eszközként, amelynek segítségével kialakíthatjuk a problémamegoldó képesség, ítélőképesség, találékonyság, rugalmasság stb. tulajdonságokat, mint a matematikai tartalommal adekvált pszichikus elemeket.

Matematikából a tantervi követelményekben rögzített jártasságok, készségek elérése jónéhány számításos feladat megoldását feltételezi, ami a monotónia veszélyével jár. Hiszen a többször ismétlődő tevékenység elveszti pozitív mozgósító erejét, egyre gyengül a tevékenység jellegéből fakadó motiváció. Gondos, előre jól megtervezett munkával érhető el az, hogy egy konkrét típusból minden feladat egy kicsit más legyen, mint a többi. A csak formai különbségeket tartalmazó feladatoktól lényegesen kevesebb fejlesztő hatás várható el, mint azoktól, amelyek az előzőleg megoldotthoz képest tartalmaznak valami újszerűt. Nyilván az a legjobb, ha a tevékenység tárgya, konkrétan a matematikai probléma, egyúttal a motiváció erősítésének funkcióját is betölti. Ezt olyan feladatok megoldásával érhetjük el, amelyekben az ismeretek (feladatsorok) egymásra épülnek, amelyek a tanulókhoz közelálló problémákkal foglalkoznak, amelyek a tanulókat érdeklő kérdésekre adnak választ, amelyeknek érdekes, a figyelmet lekötő a tartalma vagy a megfogalmazása, amelyeknél többféle megoldási mód lehetséges, valamint a paradox, megtévesztő jellegű, de tanulságos befejezésű feladatok, illetve amelyekben szokatlan, meglepő adatok szerepelnek, vagy amelyek megoldása vezet szokatlan eredményre.

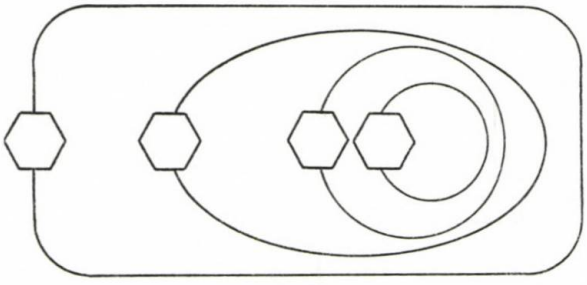
Meggyőződésünk, hogy a gyakorló pedagógus az elméleti fejtegetéseknél gyakran használhatóbbnak tartja a konkrét alkalmazások ismertetését, ezért tanítási gyakorlatunk néhány olyan *feladatát* is közreadjuk, amely alkalmasnak bizonyult a tanulók motivációjának ébrentartására.

**1.** *a)* Írd be a halmazábra címkéibe a megfelelő halmazok betűjelét:
$A$ = {járművek},
$B$ = {autók},
$C$ = {trabantok}!

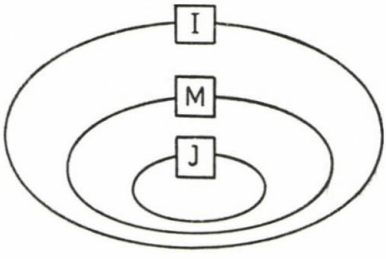


*1. ábra*

**1.** *b)* Írd be a halmazábra címkéibe a megfelelő halmazok betűjelét:
$A$ = {élőlények},
$B$ = {állatok},



*2. ábra*




*3. ábra*

$C$ = {rovarok},
$D$ = {cserebogarak}!

**2.** *a)* Keress olyan személyeket, akik megfelelnek a halmazábra jelöléseinek! A halmazábra mindegyik részébe legalább két személy monogramját írd be:
$I$ író,
$M$ magyar író,
$J$ Jókai!

Név: .....  Név: .....
Név: .....  Név: .....
Név: .....  Név: .....

**3.** A következő folyamatábrát a tej önkiszolgáló boltban történő vásárlásáról készítettük *(4. ábra)*.
A döntést nem igénylő utasításokat betűkkel megjelöltük. Írd le a cselekvési sorrendet abban az esetben, ha a hűtőpultban van tej és a több nyitva tartó pénztár között olyan is van, ahol éppen nincs vásárló!

.....

**4.** *a)* A következő számjegyekből úgy válassz ki négyet, hogy a lehető legnagyobb négyjegyű számot kapd!
A számjegyek sorrendjén nem szabad változtatni.
6 0 8 5 3 7 7 9 1 2

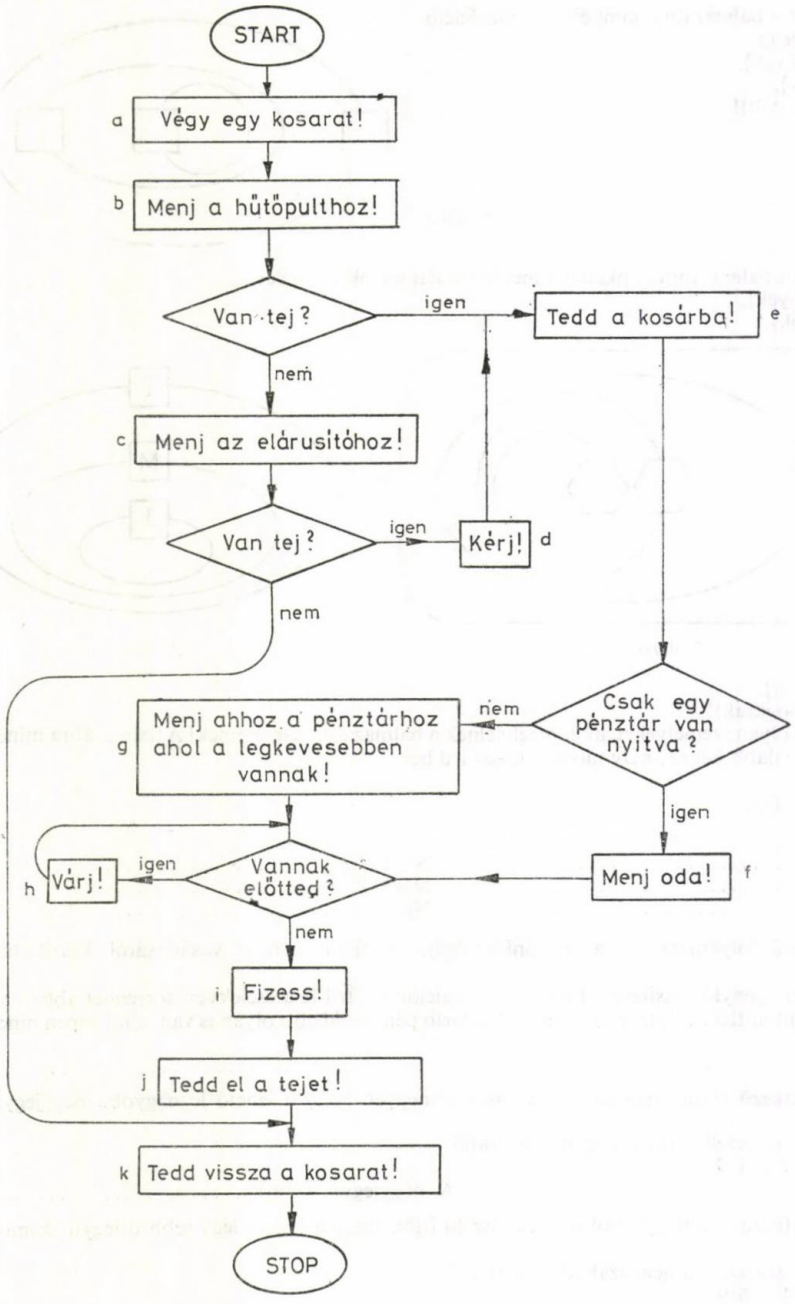
A négyjegyű szám: .....

**4.** *b)* A következő számjegyekből úgy válassz ki ötöt, hogy a lehető legkisebb ötjegyű számot kapd!
A számjegyek sorrendjén nem szabad változtatni.
5 1 0 9 3 2 4 1 6 9

Az ötjegyű szám: .....

**4.** *c)* A következő számjegyekből úgy válassz ki hatot, hogy a lehető legnagyobb hatjegyű számot kapd!
A számjegyek sorrendjén nem szabad változtatni.
9 0 1 4 5 0 8 3 5 9

A hatjegyű szám: .....




*4. ábra*

**4.** *d)* A következő számjegyekből úgy válassz ki hatot, hogy a lehető legkisebb hatjegyű számot kapd!

A számjegyek sorrendjén nem szabad változtatni.

0 9 1 5 3 8 4 1 2 6 9

A hatjegyű szám: .....

**5.** *a)* Húzz át a következő számok közül hármat-hármat úgy, hogy az egyenlőségek igazak legyenek!

$$2+2+2+5+5+5+7+7+7 = 30$$
$$2+2+2+5+5+5+7+7+7 = 33$$
$$2+2+2+5+5+5+7+7+7 = 36$$

**5.** *b)* Húzz át a következő számok közül négyet-négyet úgy, hogy az egyenlőségek igazak legyenek!

$$3+3+3+3+5+5+5+5+7+7+7+7 = 42$$
$$3+3+3+3+5+5+5+5+7+7+7+7 = 38$$
$$3+3+3+3+5+5+5+5+7+7+7+7 = 40$$

**6.** Osztás nélkül állapítsd meg a hiányzó tényezőket!

| | | | |
|---|---|---|---|
| 27·.. | 98·.. | 72·.. | 67·.. |
| 54 | 686 | 504 | 536 |
| 189 | 588 | 144 | 603 |
| 1944 | 6566 | 1944 | 6566 |

**7.** *a)* Írd be a hiányzó számokat, számjegyeket! Az összeg mindenütt ugyanannyi

17+81, 72+26, 53+□□

□□+15, 8□+□8, □□+□□

**7.** *b)* Írd be a hiányzó számokat, számjegyeket! Az összeg mindenütt ugyanannyi

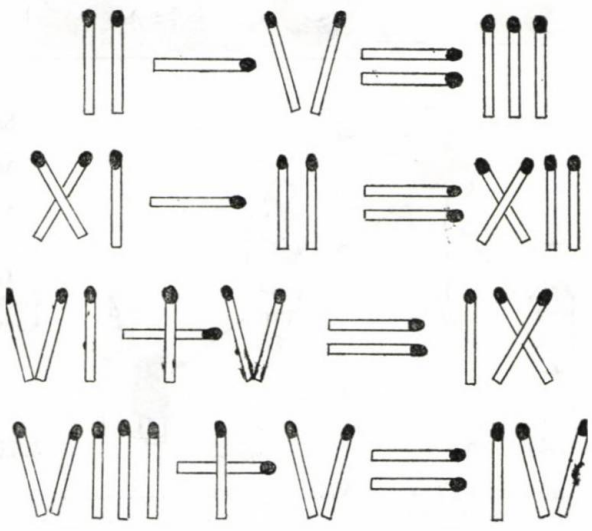
350+ 150, 215+ 285,

173+□□□ □□□+ 222,

□47+1□3, □□□+ 333

10□+□□9, 2□□+□88,

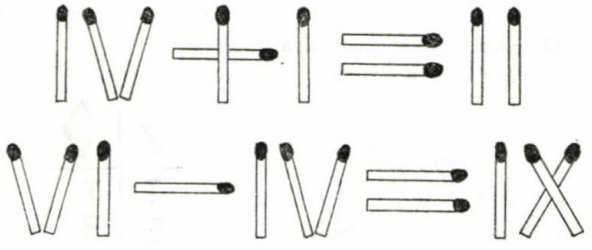
□□□+□□□



*5. ábra*

**8.** *a)* Feladatonként egy-egy gyufaszálat szabad áthelyezni, mégpedig úgy, hogy az egyenlőség igazzá váljon. Rajzold le a megoldásokat!

**8.** *b)* Feladatonként egy-egy gyufaszálat szabad áthelyezni, mégpedig úgy, hogy az egyenlőség igazzá váljon. Mindkettő feladatnak kétféle megoldása is van. Rajzold le a megoldásokat!



*6. ábra*

**9.** Tibor édesapja reggel nem tudta megvásárolni a 48,— Ft-os újságot, mert nem volt nála elég pénz. Délelőtt kapott fizetést, amiből kifizette a szakszervezeti tagdíját és vásárolt 2 db 50,— Ft-os emlékbélyeget a nemzet építendő színházához való hozzájárulásaként. 7245,— Ft-tal indult haza.

A következő állítások Tibor édesapjának fizetésére vonatkoznak. Döntsd el, hogy igazak-e!

*a)* Biztosan kevesebb, mint 7500,— Ft .....

*b)* Lehet, hogy 7346,— Ft. .....

*c)* Biztosan több, mint 7345,— Ft. .....

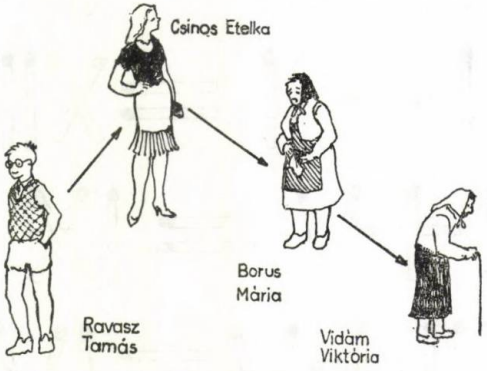
*d)* Biztos, hogy 7393,— Ft .....

*e)* Nem több mint, 7400,— Ft. .....

**10.** A postás értesítést hagyott, hogy édesanya a postahivatalban átveheti a gyes-re járó 1190,— Ft-ot. Egyúttal feladhatná az 1958,— Ft OTP részletet is. Édesapa négy nap múlva kap fizetést. Ennyi pénz van itthon:

*7. ábra*

Számold meg!
..... Ft.
Mikor célszerű feladni az OTP részletet?
.....
Miért? .....
.....

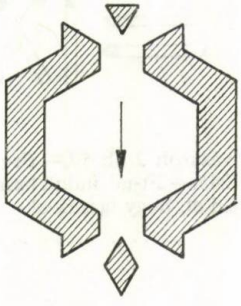



*8. ábra*

**11.** Az ábrán a nyilak mindig az illető édesanyjára mutatnak. Egészítsd ki a rokonsági fokot megadó mondatokat!

*a)* Csinos Etelkának Vidám Viktória a .....
*b)* Ravasz Tamásnak ..... a dédnagymamája
*c)* Vidám Viktória Csinos Etelkának a .....
*d)* Borus Máriának .....az unokája.
*e)* Csinos Etelka .....-nak az édesanyja.

**12.** Ezzel a géppel leírattuk a szabályát.
Pótold a hiányzó betűket!

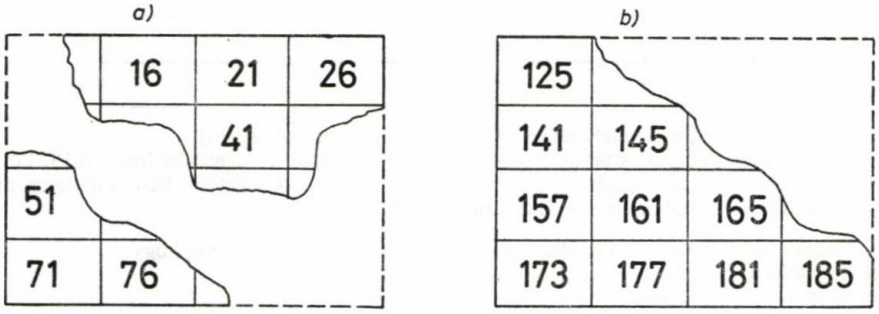


| | |
|---|---|
| T | T |
| E | Ǝ |
| N | И |
| | G |
| E | |
| L | |
| | Y |
| | Ǝ |
| S | |

| | |
|---|---|
| T | |
| Ü | |
| | K |
| | R |
| Ö | |
| | Z |
| É | |
| S | |

*9. ábra*

**13.** Rajzold meg a papírlapok hiányzó részeit!
Írd be a számokat, amelyek a letépett részen lehettek!




*10. ábra*

**14.** A következő sorozatokhoz keress szabályt, majd számítsd ki mindkettő sorozat ötödik, hatodik, hetedik és nyolcadik elemét!

$$a_1 = 33,\quad a_2 = 44,\quad a_3 = 55,\quad a_4 = 66,$$

$$b_1 = 444,\quad b_2 = 555,\quad b_3 = 666,\quad b_4 = 777.$$

**15.** Klári 1987-ben töltötte be a 13. életévét. Édesapjának addig kilenc születésnapja volt.
Hány éves lehet Klári édesapja 1987-ben?

1984 1980 1976 ..... 1952 1948 1944
Klári édesapja .....-ban született, ezért 1987-ben ..... éves volt.

**16.** Egy ötkötetes lexikon egyes kötetei három évenként jelentek meg. Az öt kötet megjelenési évszámának összege 9905.
Melyik évben jelent meg az első kötet?
Jelöljük a harmadik kötet megjelenésének évét $k$-val, akkor:

| Az egyes kötetek száma: | I. | II. | III. | IV. | V. |
|---|---|---|---|---|---|
| A megjelenés éve: | ..... | ..... | $k$ | $k+3$ | ..... |

Az évszámok összege: .....
A harmadik kötet megjelenésének éve:
Az első kötet megjelenésének éve: ..... .....

**17.** *a)* A liftben 240 kg terhelés felett kigyullad a „túlterhelt" jelzés.
Négyen szálltak be a liftbe. Tömegük kg-os pontossággal mérve:

| | | |
|---|---|---|
| András: | 53 kg, azaz | 52,5 kg $\leqq m_A < 53{,}5$ kg |
| Béla: | 74 kg, azaz | ..... kg $\leqq m_B <$ ..... kg |
| Cecília: | 46 kg, azaz | ..... kg $\leqq m_C <$ ..... kg |
| Dénes: | 68 kg, azaz | ..... kg $\leqq m_D <$ ..... kg |
| $m =$ ..... kg, | azaz | ..... kg $\leqq m <$ ..... kg |

A négy személy tömegének összege ($m = m_A + m_B + m_C + m_D$) az ismert adatok szerint (kilogrammos pontossággal): ..... kg.
de legalább: ..... kg.
és legfeljebb: ..... kg.
Biztos, lehetetlen vagy lehetséges (de nem biztos), hogy a „túlterhelt" jelzés kigyullad? .....

**17.** *b)* A TU—154-es repülőgépre felszálló 81 utas közül 32 komfort osztályon (itt a poggyász „súlyhatára" 30 kg), a többi pedig turistaosztályon (itt a poggyász „súlyhatára" 20 kg) utazott. A „súlyhatárnál" nehezebb poggyász szállításáért fizetendő tarifa olyan magas, hogy olykor a csomag sem ér annyit. Legfeljebb mennyi volt a poggyász tömege ezen a gépen, ha „túlsúlyos" csomagért senkinek sem kellett pótdíjat fizetnie?

| Jegy típusa | Utasok száma | Poggyászuk tömegének maximuma |
|---|---|---|
| Komfort | | |
| Turista | | |
| Összesen | | |

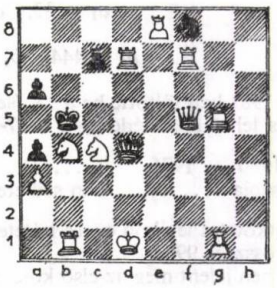
**18.** Jelöld meg a hibás vagy lehetetlen adatokat a következő szövegben!
A felső tagozaton 128 gyerek tanul. Közülük 73 leány, 65 fiú. A legmagasabb leány, 0,157 km magas. Legnehezebb fiú 2300 dkg tömegű. Az iskolában az a folyosó, amelyről három tanterem ajtaja nyílik 350 mm széles és 8,4 dm hosszú. Ez a folyosó 3,2 m magas.

**19.** Csupán az órák mutatóinak állása alapján meg lehet-e különböztetni, hogy

| | |
|---|---|
| dél vagy éjfél közeleg? | nem |
| este vagy ..... van? | ..... |
| délután vagy hajnal van? | ..... |
| éjszaka vagy ..... van? | ..... |

**20.** A sakktáblán levő bábuk helyét egy betűvel és egy számmal adhatjuk meg. A betű azt jelöli, hogy a szóban forgó mező melyik oszlopban, a szám pedig azt, hogy melyik sorban van. *(11. ábra.)*
Például a világos bástyák b1-en és g5-ön állnak.

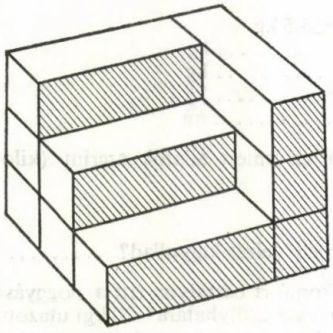
*11. ábra*




*12. ábra*

Add meg a világos bábu helyét! *(12. ábra.)*

| VILÁGOS | | SÖTÉT | |
|---|---|---|---|
| király: | ..... | király: | ..... |
| vezér: | ..... | vezér: | ..... |
| bástya: | ..... | bástya: | ..... |
| huszár: | ..... | huszár: | ..... |
| futó: | ..... | futó: | ..... |
| gyalog: | ..... | gyalog: | ..... |



*13. ábra*

**21.** A színesrúdkészlet milyen színű rúdjaiból lehet ezt a lépcsőt elkészíteni? .....

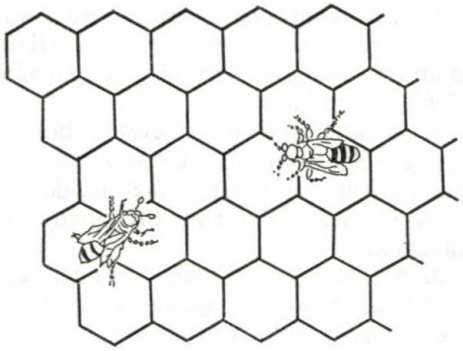
Építsd is meg! *(13. ábra.)*
Hány rúdra van szükség az előzőhöz hasonló lépcső építéséhez, ha az a színesrúdkészlet
2 cm-es, rózsaszín rúdjaiból készül: .....db.
4 cm-es, piros rúdjaiból készül: .....db.
5 cm-es, citromsárga rúdjaiból készül: .....db.

**22.** Összeilleszthetők-e a következő szabályos sokszögek úgy, hogy hézag és fedés nélkül érintkezzenek? *(14. ábra.)*
Vizsgáld meg!
Rakd ki a sík- és térmértani modellezőkészlet elemeivel:
szabályos háromszögek: .....
szabályos négyszögek: .....
szabályos ötszögek: .....
szabályos hatszögek .....
szabályos nyolcszögek: .....

**23.** Édes Anna monogramja: É A
Vállalkozó Vilmos monogramja: V V
Állíts össze monogramokat a B, G, M, T betűkből!

..... ..... ..... .....
..... ..... ..... .....
..... ..... ..... .....
..... ..... ..... .....

**24.** Az üdülőben háromféle ebéd és kétféle vacsora közül lehet választani.
Ebédre:
A vagy B vagy C menü
Vacsorára:
hideg (H) vagy meleg (M) étel.
Hányféle párosítás lehetséges?
Rendezd a lehetséges eseteket betűkód alkalmazásával!
Készíts fadiagramot!



*14. ábra*

IRODALOM


[1] *A Magyar Szocialista Munkáspárt Központi Bizottságának 1987. július 2-ai állásfoglalása a gazdasági, társadalmi kibontakozás programjáról.* Népszabadság, 1987., 156. szám 2. oldal.

[2] V. A. KRATNYECKIJ: *A tanulók matematikai képességeinek pszichológiája,* Moszkva, 1968., 197. oldal.
Magyarul:
V. F. SATALOV: *Hová lettek a közepesek?* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982., 84. oldal.

[3] GIMESNÉ ANCSEL ÉVA: *A nevelés „művészetének" néhány kérdéséről.* A Gyógypedagógiai Tanárképző Főiskola évkönyve III. Budapest, 1970., 159. oldal.

[4] DR. KÁRTESZI FERENC: *A matematikatanulás lélektana,* A Matematika Tanítása, 1986. 2. sz. 37. oldal.

[5] RÉTHY ENDRÉNÉ: *Teljesítményértékelés és tanulási motiváció,* Pedagógiai Szemle, 1986. 10. sz. 973—974. oldal.

[6] WIHELM NIGGEMANN: *A csoportmunka — mint a felnőttképzés intenzív formája,* Neue Volksbildung, Wien, 1969., 11. oldal.
Magyarul:
MARÓTI ANDOR (Szerk.): *Andragógiai Szöveggyűjtemény. Válogatás a felnőttnevelés elméletének polgári szakirodalmából.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1983., 143. oldal.

[7] KOZÉKI BÉLA: *A motiválás és motiváció összefüggéseinek pedagógiai és pszichológiai vizsgálata.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

[8] KOZÉKI BÉLA: *Motiválás és motiváció.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

[9] RÉTHY ENDRÉNÉ DR.: *Motiváció a tanítási órán.* Pedagógiai Közlemények 19. Az Eötvös Loránt Tudományegyetem Neveléstudományi Tanszékének kiadványai. Tankönyvkiadó, 52 324/19. Budapest, 1978.

[10] TAKÁCS GÁBOR: *Néhány lehetőség a motiváció erősítésére a matematika tanításakor.* Módszertani Közlemények, 1986. 3. sz. 153—161. oldal.



DR. HAJNAL IMRE
ny. szaktanácsadó
Szeged


## Egy tanmenetjavaslat a gimnáziumok I. osztályai számára

1988 nyarán a gimnáziumok I. osztályainak új matematikatankönyv jelenik meg. (Három párhuzamos tankönyv lesz.) Ez az új könyv a tanterv korrekciója szerint készült, a módosított tantervi anyagot tartalmazza. Tárgyalja a kiegészítő anyagrészeket és külön, „Függelékben", az I. osztályos matematikaanyaghoz kapcsolható számítástechnikai ismereteket. (A tankönyv száma: 13 141.)

Ahhoz, hogy megismerjük egy tankönyv (vagy tankönyvsorozat) logikai felépítését, hosszabb idő kell, mint amennyi szeptemberig van. Ezért a tankönyv használatát *néhány gyakorlati tanáccsal és egy vázlatos tanmenettel* segítjük.

1. A tankönyvben jelentős szerepe van a nyomdai szedésnek. Az apróbetűs részek kiegészítő anyagok, vagy történeti megjegyzések. Tárgyalásuk, vagy elolvasásuk segíti a törzsanyag megértését, de tartalmuk nem követelmény. A számítástechnikai rész kiegészítő anyag.

2. A tankönyvi rész bevezetésből és 32 fejezetből áll. A bevezetés nem tananyag, célja az iránymutatás. A definíciók és a tételek jelentőségét mutatja meg. Ezt minden órán érzékeltethetjük, de egy vagy két óra alatt megtanítani nem lehet. — A 32 fejezet között két olvasmány van (a 27. és a 32. fejezet). Ezek is kiegészítő anyagok.

3. A tankönyv a 32 fejezetet nem tagolja nagyobb egységekre. Az évi anyagot a tanmenet készítésénél ajánlatos nagyobb egységekre bontanunk. Az alábbiakban egy tagolást javaslunk. A 12 egység címe után zárójelben közöljük a tankönyv megfelelő fejezeteinek a sorszámát, majd azt, hogy feldolgozásukhoz hány órát javaslunk.

I. Halmazok (1—4. fejezet) ..... 7 óra
II. Számelméleti alapfogalmak (5. fejezet) ..... 3 óra
III. Hatványok; nevezetes azonosságok (6—8. fejezet) ..... 16 óra
IV. A négyzetgyök fogalma, azonosságok (9. fejezet) ..... 3 óra
V. Függvények (10—12. fejezet) ..... 9 óra
VI. Egyenletek, egyenlőtlenségek (13—16. fejezet) ..... 18 óra
VII. Háromszögek, sokszögek, szerkesztések, ponthalmazok (17—23. fejezet) ..... 20 óra
VIII. A geometriai transzformáció fogalma; távolságtartó transzformációk (24—25. fejezet) ..... 13 óra
IX. Néhány nevezetes tétel (26. fejezet) ..... 8 óra
X. Vektorok (28. fejezet) ..... 9 óra
XI. Függvénytranszformációk (29. fejezet) ..... 5 óra
XII. Egyenletek, egyenletrendszerek (30—31. fejezet) ..... 12 óra

4. A 12 nagy fejezet anyagának és óraszámának a felbontására a következőket javasoljuk:

I. 1. óra Számok áttekintése.
2., 3. óra Halmazok, részhalmazok.
4., 5. óra Műveletek halmazokkal (unió-, metszet-, különbségképzés; komplementerhalmaz).
6., 7. óra Feladatok.
II. 1. óra Osztó, oszthatóság, prímszám, összetett szám.
2., 3. óra Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.
III. 1., 2. óra Pozitív egész kitevőjű hatványok, azonosságaik.
3., 4. óra Nevezetes szorzatok.
5., 6. óra Szorzattá alakítások.
7—11. óra Feladatok
12. óra Egész kitevőjű hatványok, azonosságok.
13. óra Számok normálalakja.
14—16. óra Feladatok.
IV. 1—3. óra A négyzetgyök fogalma, azonosságai.
V. 1. óra Egyenes arányosság, százalékszámítás; fordított arányosság.
2. óra A függvény fogalma, függvények megadása, két függvény egyenlősége.
3. óra Függvények grafikus képe, elsőfokú, másodfokú függvények.
4. óra Abszolútérték-függvény, fordított arányosság függvénye.
5. óra A négyzetgyökfüggvény, egészrészfüggvény.
6. óra A függvények jellemzése (a zérushely fogalma; valamely intervallumon csökkenés, növekvés; a függvény minimumának, maximumának, helyi minimumnak, helyi maximumnak a fogalma).
7—9. óra Feladatok.
VI. 1. óra Az egyenlet fogalma (az egyenlet alaphalmaza; az egyenlet gyökei; igazsághalmaza).

2—5. óra Az egyenletek megoldási módjai (grafikus módszer; az alaphalmaz szerepe a megoldás keresésében; az értékkészlet szerepe a megoldás keresésében; megoldás keresése szorzattáalakítással; az ismeretlen kifejezése egyenletrendezéssel).
6—10. óra Feladatok, köztük egyszerű szöveges egyenletek is, paraméteres egyenletek is. — Ekvivalens átalakítások említése.
11—13. óra Egyenlőtlenségek; egyszerű egyenlőtlenségek megoldása.
14. óra Két pozitív szám számtani, mértani közepe.
15. óra A számtani és mértani közép közötti összefüggés.
16—18. óra Feladatok.

VII. 1., 2. óra Bevezetés a geometriába; távolságok; szögek, forgásszögek; síkra merőleges egyenes.
3., 4. óra Háromszögek megadása; összefüggés a háromszögek oldalai között; Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása.
5., 6. óra Összefüggés a háromszög szögei között, oldalai és szögei között.
7. óra Sokszögek.
8. óra Paralelogrammák.
9—11. óra Geometriai alapszerkesztések; szakasz felezőmerőlegese, szögfelező mint ponthalmaz; további ponthalmazok.
12., 13. óra Szerkesztési feladatok.
14. óra Ponthalmazok a koordinátasíkon.
15. óra Térbeli koordináta-rendszer.
16., 17. óra A háromszög oldalfelező merőlegesei, a háromszög köré írt kör, Thalész tétele.
18. óra A háromszög magasságvonalai, szögfelezői, beírt köre.
19., 20. óra Feladatok.

VIII. 1. óra Az általános iskolában megismert egybevágósági transzformációk és a középpontos hasonlósági transzformáció felelevenítése.
2. óra További példák geometriai transzformációkra.
3. óra A geometriai transzformáció fogalma, jelölések, a fixpont fogalma.
4., 5. óra Geometriai transzformációk szorzata, feladatok.
6. óra Távolságtartó (egybevágósági) transzformációk a síkon (összefoglalás és áttekintés).
7., 8. óra Az egybevágóság fogalma, alakzatok egybevágósága.
9., 10. óra Szimmetrikus alakzatok.
11—13. óra Feladatok.

IX. 1. óra Háromszögek középvonalai, súlyvonalai.
2. óra Négyszögek középvonalai.
3., 4. óra A kör középponti szöge, a körív hossza, a körcikk területe.
5., 6. óra Szögek mérése, radián.
7., 8. óra Feladatok.

X. 1. óra A vektor fogalma, abszolútértéke, állása, vektorok egyenlősége, ellentett vektorok, nullvektor.
2. óra Vektorok összegezése, az összeadás tulajdonságai.
3. óra Két vektor különbsége.
4. óra Vektor szorzása számmal, ennek tulajdonságai.
5., 6. óra Vektor felbontása összetevőkre.
7—9. óra Helyvektorok; vektorok a koordinátasíkon.

XI. 1. óra Egyszerű példák függvénytranszformációkra.
2. óra A függvényértékek transzformációja.
3. óra A változó transzformációja.
4., 5. óra Feladatok.

XII. 1. óra Egyenletek grafikus megoldása (függvénytranszformációk segítségével).
2—4. óra Törtes egyenletek, egyenlőtlenségek.
5. óra Kétismeretlenes egyenletek.
6. óra Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek, grafikus megoldásuk.
7. óra Behelyettesítő módszer.
8. óra Egyenlő együtthatók módszere.
9—12. óra Feladatok, szöveges egyenletek.

Az órák anyagát úgy terveztük, hogy minden órán legyen lehetőség feladatok megoldására. A nagyobb fejezetek végén lévő órákat összefoglalásnak és ismétlő feladatoknak szántuk.

A tanév folyamán követhetjük az előző sorrendet, de a témákat változatosabban is vehetjük. Teljesen zavartalan lesz a tanítás menete, ha a 12 egységet az I—IV, VII, V, VIII—IX, VI, X—XII sorrendben vesszük.

**5.** Az évi óraszámot 144-nek terveztük, ez a tantervben lévő óraszám. Beosztása a következő:

| | |
|---|---|
| Bevezetés | 1 óra |
| I—XII. anyagrész | 123 óra |
| 4 dolgozat írása és javítása | 8 óra |
| Ismétlések | 12 óra |
| Összesen | 144 óra |

Az új óraterv „B" variánsa a fakultatív órakeretből még 72 órát lehetővé tesz. (Művelődési Közlöny, 1987/11. 1089. oldal.)

**6.** A kiegészítő anyaghoz külön órákat nem terveztünk. Ezekbe az óraszámokba a kiegészítő anyagot úgy építjük be, ahogy a körülmények és a lehetőségek megengedik.

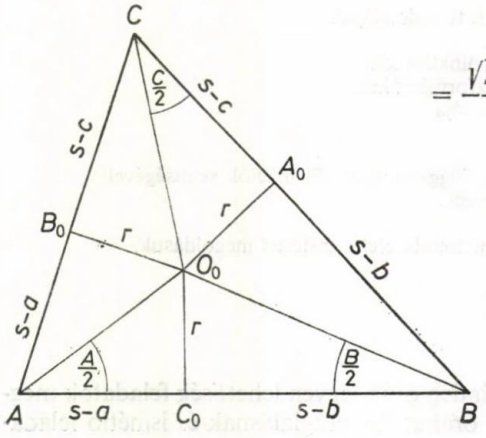
**7.** Mindezek csak tanácsok és javaslatok. A fentieket mindössze egy lehetséges tanmenetváltozatnak kell tekintenünk. Az oktatási törvény mindannyiunkra vonatkozik: „A pedagógus és az oktató joga, hogy megválassza — a nevelési és oktatási tervek, illetőleg a tantervi irányelvek keretein belül — a tananyagot és az alkalmazott módszereket."

RÁCZ JÁNOS
vezető tanár
I. István Gimnázium, Budapest

## Trigonometriai azonosságok igazolása elemi geometriai úton

Mivel minden háromszögben $c=2R\cdot\sin C$, ezért az egységátmérőjű körbe írt háromszögekben az oldalak a szemben fekvő szögek sinusaival egyenlők.

Az *1. ábrán* az *ABC* háromszög látható a beírt kör középpontjával és az érintési pontokkal.




*1. ábra*

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}=\frac{rs}{s(s-a)}=$$

$$=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\,.$$

(Heron tételének egy egyszerű bizonyítása a *2. ábra* alapján: $AO_cBO_o'O$ ötszög egy körön van, ezért $C_c$ pontra a szelődarabok szorzata: $rr_c=(s-a)(s-b)$ szorozzuk mindkét oldalt $s(s-c)$-vel és vegyük észre, hogy $t=rs=r_c(s-c)$, így $t^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$). A feladatok bizonyításában felhasználom a cosinustételt és egy helyen az $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, illetve $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ azonosságokat.

Ezek után a feladatok:

**1.** $\sin A+\sin B+\sin C=$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

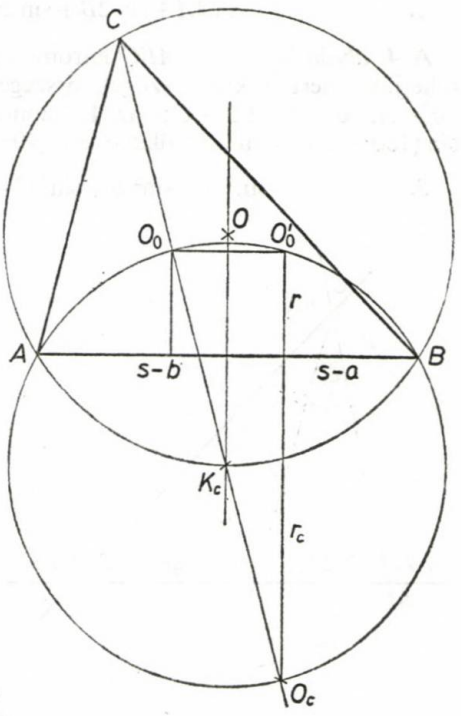
*3. ábrán* a körülírt kör legyen az egységsugarú kör: ekkor $CB_c=s=\sin A+$ $+\sin B+\sin C=CO_c\cdot\cos\frac{C}{2}$. $CO_c$ magasság az $O_aO_bO_c$ háromszögben, ezért

$$CO_c=O_aO_c\cdot\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)=$$

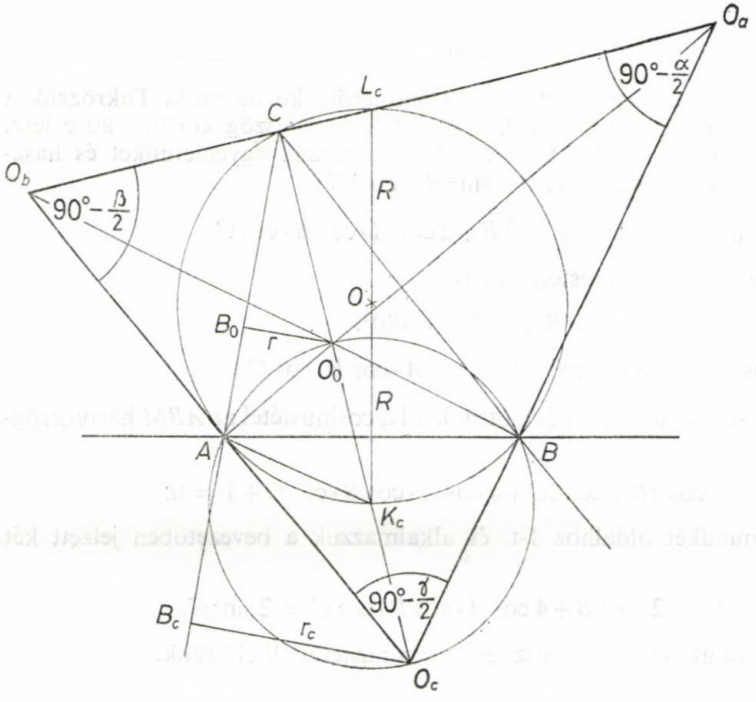
$$=O_aO_c\cdot\cos\frac{A}{2}.$$

Az $O_aO_bO_c$ háromszögben $ABC$ a talpponti háromszög, tehát az $ABC$ háromszög körülírt köre $O_aO_bO_c$ háromszög Feuerbach-köre, ezért $O_aO_bO_c$ háromszög körülírt körének sugara 2, tehát $O_aO_c=$ $=4\sin\left(90°-\frac{B}{2}\right)=4\cos\frac{B}{2}$, tehát valóban

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$




*2. ábra*

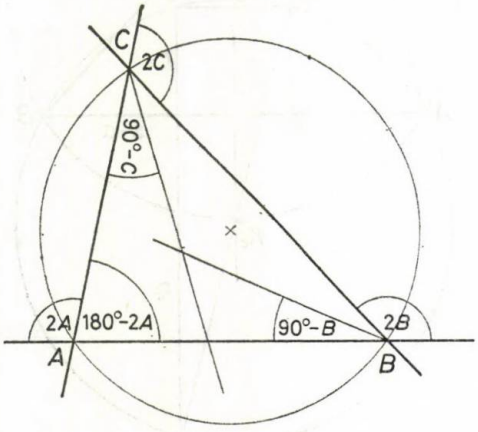



*3. ábra*

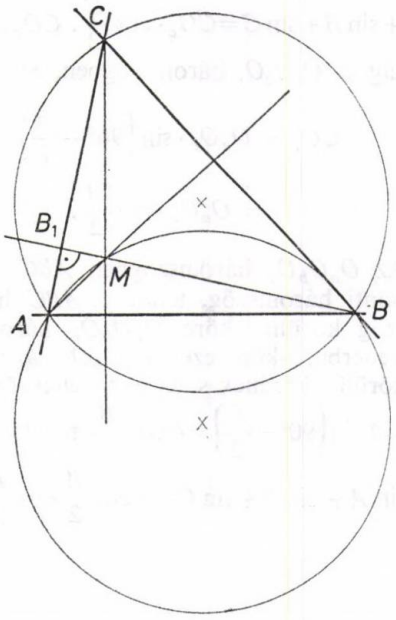
**2.** $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$

A *4. ábrán* legyen az $ABC$ háromszög külső szöge rendre $2A, 2B, 2C$. Ezt megtehetjük, mert a külső szögek összege 360°. Ekkor a belső szögek fele rendre $90°-A, 90°-B, 90°-C$; az **1.** azonosságot alkalmazzuk és vegyük észre, hogy $\sin(180°-2A)=\sin 2A$, illetve $\cos(90°-A)=\sin A$.

**3.** $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 2.$




*4. ábra*




*5. ábra*

Az *5. ábrán* az $ABC$ háromszöget az egységátmérőjű körbe írtuk. Tükrözzük a kört pl. $AB$ oldalra tengelyesen, ez a kör az $ABM$ háromszög körülírt köre lesz. Ezért $AM = \sin MBA\sphericalangle = \sin B_1BA\sphericalangle = \cos A$. Rendezzük egyenletünket és használjuk fel, hogy $1-\sin^2 A = \cos^2 A$; $1-\sin^2 B = \cos^2 B$:

$$\sin^2 C = \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C,$$

és ez $ABM$ háromszögre a cosinustétel, mert

$$AMB\sphericalangle + C\sphericalangle = 180°.$$

**4.** $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1.$

Vigyük át $\cos^2 C$-t a jobb oldalra és előttünk áll a cosinustétel az $ABM$ háromszögre.

**5.** $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + 1 = 0.$

Adjunk hozzá mindkét oldalhoz 1-t, és alkalmazzuk a bevezetőben jelzett két azonosságot:

$$2\cos^2 A + 2\cos^2 B + 4\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 2\sin^2 C.$$

2-vel osztunk és újra az $ABM$ háromszögre a cosinustétel áll előttünk.

**6.** $$\cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.$$

A *4. ábra* választása alapján az **5.** azonosság így írható:

$$\cos(180°-2A)+\cos(180°-2B)+\cos(180°-2C) = 1+4\cos A\cdot\cos\cdot B\cos C$$

és itt $A, B, C$ a belső szög felének pótszöge. Legyen most az $ABC$ háromszög belső szöge rendre $A, B, C$, akkor éppen a **6.** azonosságba megy át az előbbi azonosság.

**7.** $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)(s-a)(s-c)}{s(s-a)s(s-b)}} = \frac{s-c}{s},$$

$$\text{ezért}\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{s-a}{s};\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{s-b}{s}$$

$$\text{és}\quad \frac{s-c+s-a+s-b}{s} = \frac{3s-(a+b+c)}{s} = \frac{3s-2s}{s} = 1.$$

**8.** $$\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A = 1.$$

*4. ábra* alapján a belső szögek rendre $180°-2A$, $180°-2B$, $180°-2C$, ezért a félszögekre alkalmazva a **7.** azonosságot: $\operatorname{tg}(90°-A)=\operatorname{ctg}A$ miatt a **8.** azonosságot kapjuk.

**9.** $$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Az *1. ábra* alapján $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\frac{s-a}{r}$, ezért a bal oldal: $\frac{s-a+s-b+s-c}{r}=\frac{s}{r}$; a jobb oldal:

$$\sqrt{\frac{s(s-a)s(s-b)s(s-c)}{(s-b)(s-c)(s-c)(s-a)(s-a)(s-b)}} = \sqrt{\frac{s^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}} =$$

$$= \frac{s^2}{t} = \frac{s^2}{sr} = \frac{s}{r}.$$

**10.** $$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C.$$

A *4. ábra* alapján a **9.** azonosság átmegy a **10**-be.

**11.** Legfeljebb mekkora lehet $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$?

*I. megoldás:*

A cos függvény a $\left(o;\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő és alulról nézve homorú *(6. ábra)*. Legyen $y<x$, ekkor $\frac{\cos x+\cos y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}<$ $<\cos\frac{x+y}{2}$.

Tekintsük az $P(A; \cos A)$, $Q(B; \cos B)$, $R(C; \cos C)$ háromszöget *(6. ábra)*. E háromszög súlypontja:

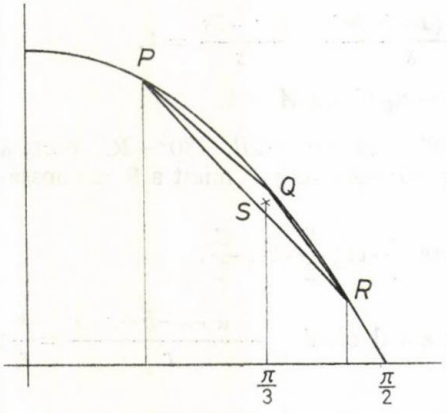
$$S\left(\frac{A+B+C}{3}; \frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right).$$

A súlypont nem lehet a görbe felett, ezért

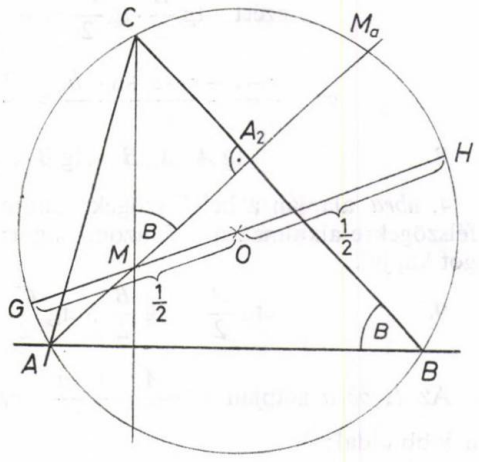
$$\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3} \leqq \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Ezért a számtani-mértani közép egyenlőtlenség miatt

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqq \frac{1}{8}.$$




*6. ábra*




*7. ábra*

*II. megoldás:*

A *7. ábrán* az $ABC$ háromszög az egységátmérőjű körben van, az $A$ csúcsból induló magasság talppontja $A_2$, $AA_2$ egyenesnek a körrel való metszéspontja $M_a$. $CMA_2 \sphericalangle = B \sphericalangle$, mert merőleges szárú szögek, tehát

$$MA_2 = MC \cdot \cos B = \cos C \cdot \cos B.$$

Az $M$ ponton átmenő átmérő két végpontja legyen $G$ és $H$, ekkor a szelőtétel értelmében: $AM \cdot MM_a = GM \cdot MH$, tehát $2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \left(\frac{1}{2} - OM\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + OM\right) = \frac{1}{4} - OM^2$. Ezért $2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leqq \frac{1}{4}$; egyenlőség akkor és csakis akkor, ha a háromszög szabályos.

**12.** Mekkora lehet legfeljebb $\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$?

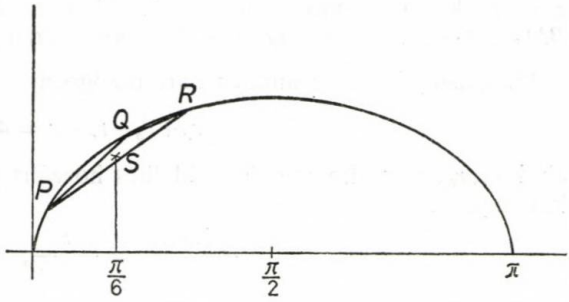
*I. megoldás:*

A $(O;\pi)$ intervallumban a sinusfüggvény is alulról homorú. Legyen $y<x$ ekkor $\frac{\sin x+\sin y}{2}=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, tehát $\frac{\sin x+\sin y}{2}<\sin\frac{x+y}{2}$.

A *8. ábrán* legyen $P\left(\frac{A}{2};\sin\frac{A}{2}\right)$; $Q\left(\frac{B}{2};\sin\frac{B}{2}\right)$; $R\left(\frac{C}{2};\sin\frac{C}{2}\right)$, ekkor a $PQR$ háromszög $S$ súlypontja:

$$S\left(\frac{\pi}{6};\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)$$

nem lehet a görbe felett, tehát a számtani közép $\leqq \sin 30°=\frac{1}{2}$. Ezért megint a mértani közép-számtani közép egyenlőtlenséggel: $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$.



*8. ábra*

*II. megoldás:*

A *3. ábrán* levő $O_aO_bO_c$ háromszög szögei rendre: $90°-\frac{A}{2}$, $90°-\frac{B}{2}$, $90°-\frac{C}{2}$, ezért a **11.** feladat állításának második megoldása alapján

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}.$$

Egyenlőség akkor és csakis akkor, ha a háromszög szabályos.

**13.** A szabályos hétszög oldala legyen $a$; két különböző átlója $b$ és $c$. Igazoljuk: $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

A *9. ábrán* $ABCDEFG$ a szabályos hétszög. Legyen $CAB\sphericalangle=x$, ekkor $ABC\sphericalangle=5x$. (Így $7x=180°$.) $ACD\sphericalangle=4x$; ezért $ADC\sphericalangle=2x$. $H$ pontot úgy vettük fel $AC$ egyenesen, hogy $AD=DH=c$ legyen. Ekkor $AHD\sphericalangle=x$, $HDC=HCD\sphericalangle=3x$, tehát $AH=b+c$.

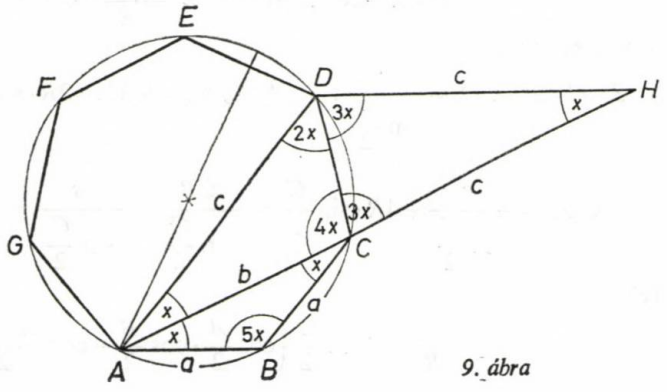
$AHD$ és $ABC$ háromszögek hasonlóak, ezért

$$(b+c):c=b:a,$$

ezért $bc=a(b+c)$, osztunk $abc$-vel:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}.$$

**14.** Igazoljuk, hogy minden háromszögben



*9. ábra*

$$AM+BM+CM = 2r+2R,$$

ahol $M$ a magasságpont $r$ a beírt, $R$ a körülírt kör sugara. Ismeretes, hogy $r=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$. (Például: Geometriai feladatgyűjtemény II. **434.** *k.*) Szorozzuk a **6.** azonosságot $2R$-rel, ekkor az *5. ábra* alapján $AM=2R\cdot\cos A$; $BM=2R\cdot\cos B$; $CM=2R\cdot\cos C$, a jobb oldal pedig $2R+2r$ lesz.

**15.** Igazoljuk, hogy minden háromszögben

$$r_a+r_b+r_c-r = 4R,$$

ahol $r_a, r_b, r_c$ rendre az $a, b, c$ oldalhoz hozzáírt kör sugara ($r$ a beírt, $R$ a körülírt kör sugara).

$$\frac{r_a(s-a)}{s-a} = \frac{t}{s-a};\quad \text{ezért}$$

$$r_a+r_b+r_c-r = \frac{t}{s-a}+\frac{t}{s-b}+\frac{t}{s-c}-\frac{t}{s} =$$

$$= \frac{s(s-b)(s-c)+s(s-a)(s-c)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)}{t}.$$

A közös nevező: $s(s-a)(s-b)(s-c)=t^2$ miatt

$$\frac{s(s-c)(s-a+s-b)+(s-a)(s-b)(s-s+c)}{t} =$$

$$= \frac{c(s^2-sc+s^2-s(a+b)+ab)}{t} = \frac{abc}{t} = 4R.$$

**16.** Igazoljuk, hogy minden háromszögben

$$\cos A+\cos B+\cos C = \frac{r_a+r_b+r_c}{R}-3.$$

(A jelölések az előző feladat szerint.)
A **15.** egyenlőség szerint $r_a+r_b+r_c=r+4R$; ezért

$$\cos A+\cos B+\cos C = \frac{r+4R}{R}-3 = 1+\frac{r}{R},$$

és ez a **6.** azonosság.

A *3. ábrán* $CO_o=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$; $K_cA=K_cO_o=K_cO_c=2R\cdot\sin\frac{C}{2}$, ezért

$$CO_c = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}+4R\cdot\sin\frac{C}{2} = \frac{CB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{s}{\sin\frac{C}{2}} = 4R\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}.$$

Tehát

$$\frac{r}{R} = 4\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right) =$$

$$= 4 \sin \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right).$$

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

**17.** Igazoljuk, hogy minden háromszögben

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \sin \left(45° + \frac{A}{4}\right) \cdot \sin \left(45° + \frac{B}{4}\right) \cdot \sin \left(45° + \frac{C}{4}\right).$$

A *3. ábrán* az $O_a O_b O_c$ háromszögre alkalmazzuk az első azonosságot: a háromszög szögei $90° - \frac{A}{2}$, $90° - \frac{B}{2}$; $90° - \frac{C}{2}$, ezért a szögek sinusának összege = a félszögek cosinusának összegével; a félszögek $45° - \frac{A}{4}$ stb. ezért

$$\cos \left(45° - \frac{A}{4}\right) = \sin \left(45° + \frac{A}{4}\right).$$

MIHAJLIK IVÁN
középiskolai tanár
Mezőgazdasági Szakközépiskola, Vác

## A hozzárendelési szabály és a függvény fogalma

Az egész matematika egyik leggyakrabban használt fogalma a *hozzárendelés*. Konkrét esetekben a hozzárendelés a következő két alapvető mód egyikének segítségével valósítható meg: egyedi módon vagy valamely szabály segítségével. Mivel egyedi módon csak véges számú elem hozzárendelése valósítható meg, a továbbiakban elsősorban hozzárendelési szabályokkal fogunk foglalkozni.

Különböző természetű elemek halmazain különböző mechanizmusú hozzárendelési szabályok működnek, mégpedig valamely hozzárendelési szabály az adott természetű elemek valamely meghatározott részhalmazán működik, és ilyen értelemben ezen szabály *működési tartományáról* beszélhetünk. A hozzárendelt elemek, melyek természete nem feltétlenül azonos azokéval, amelyekre a hozzárendelés vonatkozik, a hozzárendelési szabály *értékkészletét* alkotják.

Szeretnénk hangsúlyt adni annak a körülménynek, hogy a hozzárendelési szabály mint fogalom, nem azonos a függvénnyel (leképezéssel), hiszen a függvény megadásához szükség van azon halmaz (értelmezési tartomány) megadására, amelyen a hozzárendelés (akár egy vagy több szabály segítségével, akár egyedi módon) megvalósul, miközben a hozzárendelési szabály megadásánál elegendő azon elemek természetére való utalás, amelyekre vonatkozik a hozzárendelési szabály.

Ez — többek között — azt is jelenti, hogy egy hozzárendelési szabály segítségével legtöbbször végtelen sok függvény adható meg, hiszen a hozzárendelési szabály működési tartománya általában végtelen sok részhalmazt tartalmaz.

Más szóval, két különböző fogalomról van szó, melyek közül a függvény a hozzárendelési szabály általánosításaként is felfogható, ugyanakkor a hozzárendelési szabálynak közvetlenebb értelme van és nélküle a függvény következetes tárgyalása, véleményünk szerint, lehetetlen.

Ezzel együtt meg kell állapítanunk,

hogy e két fogalom megkülönböztetése szinte semmilyen mértékben nem jut kifejezésre a matematikai gyakorlatban, ami — többek között — annak tulajdonítható, hogy általános esetben (tetszőleges természetű elemek esetén) aligha beszélhetünk két, egymástól jól elhatárolt feladatkörről, ami a szóban forgó megkülönböztetést indokolttá tenné.

Egészen más a helyzet egyes konkrét halmazok, mindenekelőtt a számhalmazok esetén amelyekre a további vizsgálatot korlátozzuk.

Tekintsünk néhány példát:

$$a^3-a+b, \quad a^2-bc;$$

$$\sin x, \quad \sin(x+y);$$

$$|u|, \quad \sqrt{u^2+u^2}$$

$$k\cdot\lg x, \quad k(\lg x+\lg y+\lg z) \quad \text{stb.}$$

A felsorolt példák mindegyike hozzárendelési szabályt jelent a valós számok (számpárok, számhármasok stb.) valamely részhalmazán, és ezek a matematikai gyakorlatban nem feltétlenül függvényekként szerepelnek. Ez különösen az első két példában nyilvánvaló, ahol — az általánosan elfogadott szóhasználatnak megfelelően — polinomokról beszélünk. Ebbe a fogalomkörbe tartozik még az egytag, algebrai tört és ezek általánosítása — az algebrai kifejezés. Ritkábban használjuk az abszolútértékes, logaritmikus, trigonometrikus, exponenciális kifejezés terminusokat, pedig az előbbi fogalomkörnek ez lenne a természetes bővítése. Ehelyett — kissé egyoldalúan — ezekben az esetekben szinte kizárólag függvényekről beszélünk, ami annak a következménye, hogy — paradox módon — az egész matematikában alig jut kifejezésre az a körülmény, hogy itt egy más, a függvénnyel nem azonos alapfogalom is szerephez juthat. A helyzet ellentmondásos voltát jól jellemzik egyes, a működési tartomány meghatározásával kapcsolatos feladatok. Például. Az „Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából" című feladatgyűjteményben (1984. XIII. fejezet) több, a következőhöz hasonló feladat található:

határozza meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{1}{x+2}$$

kifejezés értelmezhető!

A szerzők — helyesen — nem használják a függvény terminust, hiszen az általánosan elfogadott definíció értelmében függvényről csak akkor beszélhetünk, ha az értelmezési tartomány már meg van adva. Ugyanakkor a „kifejezés" terminus túlságosan általános, nem jelent jól körülhatárolt matematikai fogalmat (pontosabban semmilyen matematika fogalmat nem jelent), ezért nem old meg semmit és csak a probléma megkerülését jelenti.

Ezzel kapcsolatosan nem érdektelen az a tárgyalás, amely egy szovjet tankönyvben (Ju. N. Makarücsev, N. G. Mingyuk „Algebra", 6. osztály, M., 1977) található. Ebben a „kifejezés változókkal" fogalom szerepel, amit a szerzők ugyan nem definiálnak, de definiálják a „kifejezés" értelmezési tartományát és a „kifejezések" azonosságát (valamely halmazon) akár egy, akár több változó esetén. Íme a szóban forgó definíciók, amelyekben mi a kissé nehézkes „kifejezés változókkal" helyett a „változós kifejezés" terminust használjuk.

*Definíció.* Valamely változós kifejezés értelmezési tartományának azt a halmazt nevezzük, amelyen ennek a kifejezésnek van értelme.

*Definíció.* Két változós kifejezést azonosnak mondunk valamely halmazon, ha ezen a halmazon értékeik megegyeznek.

A szerzők által javasolt megoldás, sajnos, több szempontból hiányos. Először is, érthetetlen módon a változós kifejezést szinte semmilyen összefüggésbe nem hozzák a hozzárendeléssel, amely pedig ennek a fogalomnak az alapja. Ennek, valószínűleg, az az oka, hogy a

hozzárendelést a függvényre „tartogatják", nem merik előbb felhasználni, mivel nem tudják (nem is próbálják) e két fogalom közötti összefüggést mélyebben tárgyalni.

Márpedig a változós kifejezés nem más, mint a számhalmazon működő hozzárendelési szabály! Mint ilyen, van működési (értelmezési) tartománya, ami mint fogalom, nem azonos a függvény értelmezési tartományával.

Egy másik komoly hiányosságot — az azonosság helytelen (felületes) definiálását — itt csak jelezni tudjuk, mivel ennek a taglalása külön dolgozatot igényelne. Mindenesetre rámutatunk arra, hogy ez a hiányosság az egyenlőséggel (változós kifejezések egyenlőségével) kapcsolatos fogalomkör tisztázásának során kerül felszínre.

A változós kifejezés igazi értelmét, mint sok más esetben, az a feladatkör adja meg, amelynek ellátására hivatott. Itt elsősorban az azonos átalakításokról és ezekhez kapcsolódó feladatokról van szó. Az ilyen feladatoknál, ugyanis, nincs semmi értelme egy előre megadott tartományon belüli vizsgálatnak, hiszen az adott törvényszerűségek az egész működési tartományra egyaránt vonatkoznak.

Ezzel szemben, a függvényszerű felfogás és ezzel kapcsolatosan az értelmezési tartomány rögzítése akkor válik szükségessé, amikor előtérbe a lokális tulajdonságok kerülnek (folytonosság, monotonitás, differenciálhatóság stb.). Az ilyen jellegű feladatok értelemszerűen feltételezik a megfelelő tartomány: zárt vagy nyitott intervallum, valamely pont környezete stb. megadását. Ehhez kapcsolódik az a körülmény is, hogy a függvénymegadás nem kötődik szorosan egy adott változós kifejezéshez, hanem különböző tartományokon különböző változós kifejezések segítségével vagy — véges számú helyen — egyedi hozzárendeléssel adható meg.

Fontos körülmény továbbá, hogy — noha az értelmezési tartomány megadása a konkrét függvény megadásának szerves részét képezi — a vizsgálat jellegét nem lehet visszavezetni csupán ennek a tartománynak a formai megadására (illetve meg nem adására). Több általánosabb jellegű probléma tárgyalásánál (pl. a differenciálhatóság vagy integrálhatóság általános feltételeinél) az értelmezési artomány konkrét megadásának nincs is értelme, ezért elegendő az erre vonatkozó közvetett utalás, illetve általános jelölés, mondjuk, $(a, b)$.

Ezen kívül, szeretnénk még kihangsúlyozni, hogy a gyakorlatban a különböző feladatkörök ritkán (különülnek el élesen egymástól. Vegyük, például, a konkrét típusú (lineáris, másodfokú stb.) függvényeket. Már a definíciójukban is benne van az, hogy ezek alapjában meghatározott típusú hozzárendelési szabályok lesznek. További összefonódást jelent az a körülmény, hogy általános vizsgálatuk során a legbővebb értelmezési tartományból célszerű kiindulni, amely azonos a megfelelő változós kifejezések működési tartományával. Végül, a vizsgálat során olyan feladatok is felmerülnek, amelyeknél az $ax+b$, $ax^2+bx+c$ kifejezéseket többváltozós kifejezésekként kell alkalmazni. Például, a következő átalakításoknál:

$$ax+b = a\left(x+\frac{b}{a}\right),$$

$$ax^2+bx+c =$$

$$= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\times$$

$$\times\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

RÓKA SÁNDOR
főiskolai tanársegéd
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

# Miért nem lehet? Feladatok szakkörre II.

Mottó: „(a feladatmegoldás) a karaktert is fejleszti. Mert hogyha nehéz problémánk adódik és azon hetekig, hónapokig, évekig, sőt élethosszig is gondolkodnunk kell — az karakter nélkül nem megy! Ahhoz kitartás kell és akaraterő. Az ember tanulja meg, hogy ne adja fel még a reménytelennek látszó eseteket sem."

*Pólya György*

A feladatok megoldása ötletességet és némelyike kellő kitartást igényel, ezért használhatók az iskolai feladatmegoldó pontversenyben is. Az ilyen jellegű feladatok megfogalmazásával a feladatmegoldónak egy rejtvényszerű, a szokásosnál izgalmasabb problémát tűzünk ki, így alkalmasak az érdeklődés felkeltésére.

### Feladatok

**1.** Miért nem lehet olyan háromszöget készíteni, amelynek magasságai 1, 2 és 3 egység?

**2.** Miért nem lehet $2^n-1$ és $2^n+1$ ($n\neq 2$ rögzített pozitív egész szám) számok mindegyike prímszám?

**3.** Miért nem lehet 1988-at eredményül kapni úgy, hogy egy egész számból levonjuk számjegyei összegét?

**4.** Miért nem lehet az $x^7+45x+1987=0$ egyenletnek egész gyöke?

**5.** Miért nem lehet 15 telefonállomást egymással úgy összekötni, hogy közülük bármelyik pontosan 7 másikkal legyen összekötve?

**6.** Miért nem lehet egy $n\times n$-es táblázat mezőibe az 1, 2, 3 számokat úgy beírni, hogy a sorokban, oszlopokban és a két átlóban lévő számok összege mind különböző legyen?

**7.** Miért nem lehet a $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 24^2$ számokból $5\times 5$-ös bűvös négyzetet készíteni?

**8.** Miért nem lehet az $n^4+64$ szám prímszám, ahol $n$ természetes számot jelöl?

**9.** Miért nem lehet az 1444...4 (100 db 4-es) szám négyzetszám?

**10.** Miért nem lehet az $\overline{abcabc}$ hatjegyű szám négyzetszám?

**11.** Miért nem lehet az $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ összeadás eredménye négyzetszám?

**12.** Miért nem lehet egy négyzetszám, s valamelyik osztójának összege négyzetszám?

**13.** Miért nem lehet egy négyzetszám számjegyeinek összege 1988?

**14.** Miért nem lehet két páratlan négyzetszám összege négyzetszám?

**15.** Miért nem lehet öt egymást követő négyzetszám összege négyzetszám?

**16.** Miért nem lehet öt egymást követő természetes számot két csoportra osztani úgy, hogy a csoportokban levő számok szorzata egyenlő legyen?

**17.** Miért nem lehet 17 egymást követő egész szám összege prímszám?

**18.** Miért nem lehet 18 egymást követő egész szám összege osztható 18-cal?

**19.** Miért nem lehet úgy kiválasztani 27 különböző pozitív egész számot 100-ig, hogy páronként relatív prímek legyenek?

**20.** Miért nem lehet úgy kiválasztani 51 különböző pozitív egész számot 100-ig, hogy ne legyen közöttük relatív prím számpár?

**21.** Miért nem lehet úgy kiválasztani 51 különböző pozitív egész számot 100-ig, hogy közülük egyik se ossza valamely másikat?

**22.** Miért nem lehet úgy kiválasztani 51 különböző pozitív egész számot 100-ig, hogy körükben ne legyen megoldható az $a+b=c$ egyenlet?

**23.** Miért nem lehet egy különböző számokból álló végtelen számtani sorozat minden eleme prímszám?

**24.** Miért nem lehet egy különböző számokból álló végtelen számtani sorozat minden eleme négyzetszám?

**25.** Miért nem lehet egy számtani sorozatban pontosan két racionális szám?

**26.** Miért nem lehet egy számtani sorozatban pontosan két irracionális szám?

**27.** Miért nem lehet egy kör kerületén elhelyezni 10 különböző számot úgy, hogy bármelyik szám két szomszédja számtani közepe legyen?

**28.** Miért nem lehet egy végtelen négyzetrácsos papíron a mezőket úgy kitölteni különböző pozitív egészekkel, hogy bármelyik mezőben álló szám a vele szomszédos négy szám számtani közepe legyen?

**29.** Miért nem lehet egy kocka csúcsaiba elhelyezni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokat úgy, hogy bármelyik kockaél két végén levő szám összege ugyanannyi legyen?

**30.** Miért nem lehet $\lg n$ és $\lg(n+1)$ egyszerre racionális, ahol $n$ pozitív egész?

**31.** Miért nem lehet megadni két olyan irracionális számot, melyek összege is, különbsége is racionális?

**32.** Miért nem lehet megadni három olyan irracionális számot, melyek közül bármely kettő összege racionális?

**33.** Miért nincs az $f(g(x))=g(f(x))$ egyenletnek megoldása, ha $f(x)=x^2+1$ és $g(x)=3-3x-x^3$?

**34.** Miért nem lehet az $f(f(x))=x$ egyenletet megoldani, ha tudjuk, azt, hogy az $f(x)=x$ egyenletnek nincs megoldása és $f(x)$ polinom?

**35.** Miért nincs olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $f(7)=10$ és $f(11)=13$ teljesülne?

**36.** Miért nincs olyan $f(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre $f(7)=11$ és $f(11)=13$ teljesülne?

**37.** Miért nincs az $f(x)$ egész együtthatós polinomnak egész gyöke, ha $|f(3)|=|(f(7)|=1$?

**38.** Miért nincs olyan egész együtthatós $f(x)$ polinom, és $a, b, c$ különböző egész számok, amelyekre teljesülne, hogy $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=a$?

**39.** Miért nem lehet az $f(x)=\cos x+\cos a\cdot x$ függvény periodikus, ahol az $a$ szám irracionális?

**40.** Miért nem lehet az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok két különböző sorrendjével két olyan hétjegyű számot felírni, hogy egyik szám a másik osztója legyen?

**41.** Miért nem lehet az $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ szám 12-szerese az $\overline{a_2 a_3 \ldots a_n}$ számnak?

**42.** Miért nem lehet felírni olyan ötjegyű számot, melyre teljesülne az $\overline{abcde}=a^5+b^4+c^3+d^2+e$ egyenlőség?

**43.** Miért nem lehet a $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ szám egész szám, ahol $n$ pozitív egész?

**44.** Miért nem lehet konvex sokszögben négy hegyesszög?

**45.** Miért nem lehet olyan konvex poliédert találni, amelynek oldallapjai különböző oldalszámú sokszögek?

**46.** Miért nem lehet egy korlátos konvex síkidomnak két szimmetriaközéppontja?

**47.** Miért nem lehet egy korlátos síkidomnak két szimmetriaközéppontja?

**48.** Miért nem lehet egy középpontosan szimmetrikus síkidomnak pontosan egy szimmetriatengelye?

**49.** Miért nem lehet a négyzetrácsos papíron 25 mezőt úgy kijelölni, hogy mindegyik mező a többi kijelölt mező közül páratlan sokkal legyen élszomszédos?

**50.** Miért nem lehet 10 egység sugarú körbe 450 pontot elhelyezni úgy, hogy bármely két pont távolsága legalább 1 egység legyen?

### Útmutatások a feladatok megoldásához

**1.** Felírva a háromszög területének kétszeresét $2t=a\cdot 1=b\cdot 2=c\cdot 3$, innen a háromszög oldalai $c, \frac{3}{2}c, 3c$, ezekből nem szerkeszthető háromszög.

**2.** A $2^n-1, 2^n, 2^n+1$ három egymást követő egész közül az egyik osztható 3-mal.

**3.** Ha egy számból levonjuk jegyei összegét, a különbség osztható lesz 9-cel.

**4.** Az $x$ értéke akár páros, akár páratlan, az egyenlet bal oldalán álló kifejezés páratlan szám lesz.

**5.** Az állomások közti összekötések, élek számának kétszeresét kapjuk, ha összeadjuk az állomásokról kiinduló élek számát. Ez az összeg $15\cdot 7$ nem páros szám.

**6.** A megadott módon elkészíthető legkisebb összeg $n$, a legnagyobb $3n$, ez összesen $2n+1$ különböző érték, míg a táblázatban a sorok, oszlopok és átlók száma $2n+2$.

**7.** A megadott számokat 3-mal osztva 9 szám 0-t, 16 szám 1-et ad maradékul. Ez utóbbi lehetetlenné teszi a számok kívánt elrendezését.

**8.** $n^4+64=n^4+16n^2+64-16n^2=(n^2+8)^2-(4n)^2=(n^2+4n+8)\cdot(n^2-4n+8)$.

**9.** A számot 4-gyel osztva 36 111...1-et (98 db 1-es) kapunk, ami nem négyzetszám, mert 4-gyel osztva 3-at ad maradékul.

**10.** $\overline{abcabc}=1001\cdot\overline{abc}=7\cdot 11\cdot 13\cdot\overline{abc}$, ha ez a szorzat négyzetszám, akkor osztható a 7, 11, 13 prímszámok négyzetével is, azonban $1001^2$ már hétjegyű szám.

**11.** A megadott összeg $111\cdot(a+b+c)=3\cdot 37\cdot(a+b+c)$ alakra hozható, s ha ez négyzetszám, akkor osztható $37^2$-nel, vagyis 37 osztja az $a+b+c$ összeget, ami nem lehet, mert az összeg maximális értéke 27.

**12.** Legyen $n^2=a\cdot b$, ekkor $n^2+a=a\cdot(b+1)$. Ha $a$ négyzetszám, akkor $b$ is négyzetszám, s ekkor $b+1$ nem lehet négyzetszám, így $a\cdot(b+1)$ sem négyzetszám. Ha $a$ nem négyzetszám, akkor van 1-től nagyobb közös osztója $b$-vel, de nincs 1-től nagyobb közös osztója $b+1$-gyel, ezért az $a\cdot(b+1)$ szorzat nem lehet négyzetszám.

**13.** Egy négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad, míg 1988 3-mal osztva 2-t ad maradékul.

**14.** Páratlan négyzetszám 4-gyel osztva 1 maradékot ad, míg páros négyzetszám 0-t ad maradékul.

**15.** $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5\cdot(n^2+2)$, s $n^2+2$ soha nem osztható 5-tel, mert négyzetszám 3-ra, 8-ra nem végződik.

**16.** A két szorzat közül az egyik osztható 5-tel, a másik nem.

**17.** Az összeg osztható 17-tel.

**18.** Az összeg páratlan.

**19.** 100-ig 25 prímszám van. Ha kiválasztottam a 27 számot, közte lehet az 1, de a fennmaradó 26 szám közt biztosan van kettő, amely osztható ugyanazzal a prímszámmal.

**20.** Az 51 szám közt van két szomszédos.

**21.** Bármely szám $2^a\cdot b$ alakban írható, ahol $b$ páratlan szám. A kiválasztott 51 szám közt van kettő, melyeknél ez a $b$ megegyezik.

**22.** Legyen $a_{51}$ a kiválasztott számok közt a legnagyobb. Az $a_{51}-a_1$, $a_{51}-a_2$, ..., $a_{52}-a_{50}$ és az eredeti 51 darab szám együtt 101 szám, ezért van köztük egyenlő, $a_{51}-a_m=a_k$.

**23.** Válasszunk egy olyan $p$ prímszámot, amely nem osztója a sorozat differenciájának. Ekkor a sorozat $p$ darab egymást követő eleme közt bármely kettő különböző maradékot ad $p$-vel osztva, tehát valamelyik osztható $p$-vel.

**24.** A szomszédos négyzetszámok közti távolság tetszőlegesen nagy lehet.

**25.** Ha $a_k$ és $a_{k+r}$ racionális számok, akkor $a_{k+2r}$ is racionális.

**26.** Ha $a_k$ és $a_{k+r}$ irracionális, akkor ha a sorozat differenciája racionális, úgy $a_{k+2r}$ irracionális. Ha pedig a differencia irracionális szám, akkor a sorozatban legfeljebb egy racionális szám van.

**27.** Válasszuk ki a 10 közül a legkisebbet, ez meg kell egyezzen a két szomszédjával, és így tovább.

**28.** Hasonló az előzőhöz.

**29.** Valamely csúcsból induló két él tulsó végén ugyanaz a szám kell legyen. Másképp: ha összeadjuk az élekhez tartozó számokat, akkor az $1+2+3+\ldots+8$ összeg háromszorosát kapjuk, s ez az összeg nem osztható 12-vel (12 éle van a kockának).

**30.** Legyen $\lg n=\frac{p}{q}$ és $lg\,(n+1)=\frac{r}{s}$. Ekkor $10^{\frac{p}{q}}=n$ és $10^{\frac{r}{s}}=n+1$, vagy másképp $10=n^{\frac{q}{p}}$ és $10=(n+1)^{\frac{s}{r}}$, azaz $n^{q\cdot r}=(n+1)^{p\cdot s}$ lenne, de $n$ és $n+1$ relatív prímek, ezért a két oldal nem egyenlő.

**31.** Tegyük fel, hogy lehetséges. Legyen $x$, $y$ irracionális, $p$, $q$ racionális és $x-y=p$, $x+y=q$. Adjuk össze a két egyenletet $2x=p+q$, a bal oldalon iraccionális, a jobb oldalon racionális szám áll.

**32.** Hasonló az előző feladathoz.

**33.** $f(g(x))>g(x)>g(f(x))$.

**34.** Vagy $f(x)>x$ minden $x$-re, vagy $f(x)<x$ minden $x$-re. Az első esetet véve $f(f(x))>f(x)>x$.

**35.** Használjuk fel, hogy az $f(x)$ egész együtthatós polinomra és $a$, $b$ egész számokra mindig teljesül $a-b\,|\,f(a)-f(b)$.

**36.** Hasonló az előzőhöz.

**37.** Hasonló az előzőkhöz. Legyen $c$ egész gyök. Ekkor $c-3\,|\,f(c)-f(3)$ s ez a különbség abszolút értékben $=1$, ugyanígy $c-7\,|\,f(c)-f(7)$, s ez a különbség abszolút értékben $=1$. Azaz a $c-3$ és $c-7$ egészek mindegyike osztója az 1-nek.

**38.** Használjuk a 35. feladat megoldásánál kimondott állítást.

$$b-c=f(a)-f(b)=(a-b)\cdot A,$$

$$c-a=f(b)-f(c)=(b-c)\cdot B,$$

$$a-b=f(c)-f(a)=(c-a)\cdot C.$$

Legyen például $|c-a|>|b-a|$, s ez a harmadik egyenlőségnél okoz ellentmondást, mert $C$ egész szám.

**39.** Tegyük fel, hogy periodikus, s a periódus $t$, azaz $\cos x+\cos a\cdot x=\cos(x+t)+\cos a\cdot(x+t)$. Legyen most $x=0$. Ekkor $2=1+1=\cos t+\cos a\cdot t$, ez csak úgy lehet, ha $\cos t=1$ és $\cos a\cdot t=1$. Ebből $t=2k\pi$ és $a\cdot t=2l\pi$, ahonnan $a=\frac{l}{k}$ lenne, s ez nem lehetséges, mert az egyenlőség egyik oldalán racionális, másik oldalán irracionális szám áll.

**40.** Legyen a két szám $a$ és $b$. Ha a $a|b$, akkor $a|b-a$ is teljesül. A feladatból következik, hogy $9|b-a$, mivel $(a,9)=1$, így $9a|b-a$, s ez már nagysági viszonyok miatt nem lehet.

**41.** A feladat feltételéből $a_1\cdot 10^{n-1}=11\cdot\overline{a_2 a_3\ldots a_n}$, $11|a_1$ adódik.

**42.** $\overline{abcde}=10^4a+10^3b+10^2c+10d+e>a^5+b^4+c^3+d^2+e$.

**43.** Ha $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ szám egész, akkor $n+\sqrt{n}$ négyzetszám, s $\sqrt{n}$ egész. Azaz $k^2+k=m^2$, de $k^2<k^2+k<(k+1)^2$.

**44.** A sokszög négy hegyesszögénél levő külső szögének összege nagyobb mint 360°, ellentétben azzal, hogy a külső szögek összege 360°.

**45.** Vegyük a poliéder legnagyobb oldalszámú lapját, legyen ez egy $n$ oldalú sokszög. Ha a többi oldal mind különböző oldalszámú, akkor ezen kiválasztott lappal szomszédos oldallapok közt lenne 0, 1 és 2 oldalú sokszög is.

**46.** Legyen $P_1$ és $P_2$ két szimmetriaközéppont. Az ezeket összekötő egyenes messe a konvex síkidomot az $A$ pontban. Az $A$ pontot tükrözve $P_1$-re, $P_2$-re két különböző pontot kapunk, amelyek ellentmondásban lesznek az alakzat konvexségével.

**47.** Ha egy síkidomnak $P_1$ és $P_2$ szimmetriaközéppontja, akkor $P_1$ tükörképe $P_2$-re is szimmetriaközéppont lesz. Ezt a tükrözést többször megismételve mindig újabb szimmetriaközépponthoz jutunk, s ezek valamelyike már a korlátos alakzattól távol lesz.

**48.** Ha egy középpontosan szimmetrikus alakzatnak van szimmetriatengelye, akkor az erre merőleges és a szimmetriaközépponton átmenő egyenes is szimmetriatengely lesz.

**49.** Hasonló az **5.** feladathoz.

**50.** Ha volna ilyen elrendezés, akkor rajzoljunk mindegyik pont köré $\frac{1}{2}$ sugarú köröket, ezek nem metszik egymást, s benne vannak a 10,5 sugarú körben. Akkor területeket összehasonlítva $450\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\leqq(10{,}5)^2\cdot\pi$, azaz $450\leqq 441$ lenne.

## FELADATOK

*Rovatvezető:* Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

*Beküldési határidő:* a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

**1185.** Az $A$-ban derékszögű $ABC$ háromszögben meghúztuk az $AD$ magasságot és az $AE$ szögfelezőt. A $BDA\sphericalangle$ felezője $AB$ oldalt $M$-pontban, az $ADC\sphericalangle$ felezője $AC$-oldalt $N$-pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy NEMA négyzet!

**1186.** Melyik egységnyi területű háromszögbe írható a legnagyobb területű négyzet?

**1187.** Melyik a nagyobb, az

$$1985^{2000}+1988^{2000} \text{ vagy az } 1986^{2000}+1987^{2000}?$$

*Varga István, Nagyszalonta*

**1188.** Legyenek $p$ és $r$ olyan pozitív valós számok, amelyek reciprokainak összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{r(r+1)} < \frac{1}{2}!$$

*Róka Sándor, Nyíregyháza*

**1189.** Mutassuk meg, hogy az $x^n-x-n=0$ ($n \geqq 2$ egész szám) egyenletnek mindig egyetlen gyöke van az $[1; 2]$ intervallumban! Jelölje $x_n$ ezt a gyököt! Igazoljuk, hogy az $(x_n)$ sorozat konvergens, és határozzuk meg ezt a határértéket!

*Bencze Mihály, Brassó*

**1190.** Legyen $n$ pozitív egész és $H$ az egész számoknak olyan halmaza, hogy minden eleme vagy két $H$-beli elem összege, vagy egy $H$-beli eleme kétszerese, továbbá minden olyan legfeljebb $n$-tagú összeg, amelynek valamennyi eleme $H$-ból való, nem egyenlő nullával (egytagú összeget is megengedtünk)! Bizonyítsuk be, hogy $H$-nak legalább $2n+2$ eleme van!

*OKTV. 1988. II. forduló*

## Feladatmegoldások (1161—1166.)

**1161.** Egy utcaszakasz egyik oldalán, saroktól sarokig a házszámok összege 117. Mi a szakasz elejétől számított ötödik háznak a házszáma?

*Megoldás:* Utcák házainak szokásos számozásában a házszámok mindig 2-vel nőnek, így egy összefüggő szakaszon levő házszámok számtani sorozatot alkotnak. Egy oldalon vagy mindeа házszám páros, vagy mind páratlan. Legyen a szakasz első házának a száma $a_1$, a házak száma $n$, akkor az utolsó ház száma $a_n=a_1+2(n-1)$, így összegük

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n = (a_1+n-1)n = 117,$$

és innen

$$a_1 = \frac{117}{n} - n + 1.$$

Eszerint $n$ csak a 117 valamelyik 5-nél nem kisebb osztója lehet, hiszen az utcaszakaszon legalább 5 ház van, továbbá olyan, mellyel $a_1$ pozitívnak adódik, azaz 11-nél kisebb. A $117=3^2 \cdot 13$, osztói: 1, 3, 9, 13, 39, 117, ezek közül a követelményeknek csak $n=9$ felel meg, és ezzel $a_1=5$. Így az ötödik ház az $5+4 \cdot 2=13$-as számot viseli. (Ez a ház a szakasz végétől is ötödik!)

*Bíró Bálint, Eger*

*Megjegyzés:* A megoldásban feltettük még, hogy minden telken van ház, és hogy az utcaszakaszon sem összevont, sem megosztott telkek (például 15—17, vagy 9/*a* és 9/*b* számúak nincsenek).

Néhányan: *Bencze Mihály, Csorba Ferenc, Hajna János* más számozási elvből kiindulva is adtak megoldást. Ezekre itt nem térünk ki.

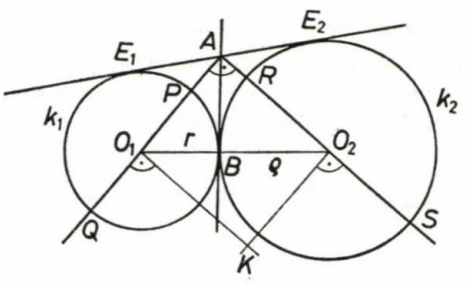
*A megoldók száma: 45.*

**1162.** Az egymást kívülről érintő $O_1$, $O_2$ közepű $k_1$, $k_2$ körök közös belső érintője e körök egyik külső érintőjét az $A$ pontban metszi. Az $AO_1$ egyenes a $k_1$ kört a $P$ és $Q$, az $AO_2$ egyenes a $k_2$ kört az $R$ és $S$ pontban metszi (a $P$ és $R$ pontok az $A$-hoz közelebbiek). Igazoljuk, hogy a $P$, $Q$, $R$ és $S$ pon-

tok egy körön vannak! Az $AQS$ és az $APR$ háromszögek területének aránya milyen körökre minimális?

*Varga István, Nagyszalonta*

*Megoldás:* Az ábra jelöléseit használva, mivel $AQ$ és $AS$ mellékszögek szögfelezői, ezért merőlegesek egymásra, tehát az $O_1AO_2$ derékszögű háromszög. Mivel $AB$ merőleges az $O_1O_2$ átfogóra, a magasságtétel alapján $AB=\sqrt{rq}$. Pitagorasz tételét az $AO_1B$, illetve $AO_2B$ derékszögű háromszögekre alkalmazva:




$$AO_1=\sqrt{rq+r^2},\quad AO_2=\sqrt{rq+q^2}\quad\text{és ezekből}$$

$$AP=AO_1-r=\sqrt{rq+r^2}-r$$

és

$$AS=AO_2+q=\sqrt{rq+q^2}+q.$$

Megmutatjuk, hogy a $PQ$ és az $RS$ szakaszok felezőmerőlegesének $K$ metszéspontja $P$-től és $R$-től egyenlő távolságra van, mert ebből következik, hogy $P$, $Q$, $R$ és $S$ körön vannak.

Az $AO_1KO_2$ négyszög téglalap, mert $A$-nál, $O_1$-nél és $O_2$-nél levő szöge derékszög. Ezért az $O_1PK$, illetve $O_2RK$ derékszögű háromszögekből

$$PK=\sqrt{O_1P^2+O_1K^2}=\sqrt{O_1P^2+AO_2^2}=\sqrt{r^2+rq+q^2},$$

illetve

$$RK=\sqrt{O_2K^2+O_2R^2}=\sqrt{q^2+qr+r^2},$$

következésképpen, $PK=RK$, tehát $PQRS$ húrnégyszög; továbbá $APR\sphericalangle=ASQ\sphericalangle$, és ezért az $APR$ és az $ASQ$ derékszögű háromszögek hasonlóságából területeik arányára

$$\frac{t_{ASQ}}{t_{APR}}=\left(\frac{AS}{AP}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{rq+q^2}+q}{\sqrt{rq+r^2}-r}\right)^2. \tag{1}$$

Vezessük be a $\frac{q}{r}=x$ új változót. Ezzel (1) jobb oldala a $\left(\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x+1}-1}\right)^2$ kifejezést adja. Ennek minimumát keressük. Minthogy mind a hatványalap számlálója, mind a nevezője pozitív, a hatvány — négyzet — minimumát ugyanarra a változó értékre veszi fel, mint a hatvány alapja. Ha ez utóbbit $k$-val jelöljük, úgy gyöktelenítés és egyszerűsítés után

$$k=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1+\sqrt{1+\frac{1}{x}},$$

azaz

$$k-1=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}.$$

Alkalmazzuk csoportonként a számtani, mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geqq 2\quad\text{és}\quad\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\geqq 2\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}=2\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}\geqq 2\sqrt{2},$$

tehát

$$k-1\geqq 2+2\sqrt{2}\quad\text{és ezért}\quad k\geqq 3+2\sqrt{2}.$$

Minimumát a $\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, azaz $x=1$, vagyis $q=r$ esetén veszi fel, s ez az érték az $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2=$ $=17+12\sqrt{2}$.

*Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza*

*A megoldók száma: 25.*

**1163.** Számítsuk ki a következő összeget:

$$\sum_{k=3}^{98} \binom{k-1}{2} \cdot \binom{100-k}{2}.$$

*Csúri József, Szeged*

*I. megoldás:* Tekintsük az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmazt, és számláljuk meg ennek 5 elemű részhalmazait. Ezek száma egyrészt nyilván $\binom{100}{5}$. Másrészt legyen $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ egy tetszőleges 5 elemű részhalmaz, melyre $1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 \leqq 100$. A harmadik elemre a $3 \leqq a_3 \leqq 98$ teljesül. Jelölje $S_k$ azoknak a részhalmazoknak a számát, melyekre $a_3=k$, $3 \leqq k \leqq 98$. Ekkor az $a_1, a_2$ elemek az $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ halmazból $\binom{k-1}{2}$ — féleképpen, az $a_4, a_5$ elemek a $\{k+1, k+2, \ldots, 100\}$ halmazból $\binom{100-k}{2}$ — féleképpen választhatók ki és így

$$S_k = \binom{k-1}{2} \cdot \binom{100-k}{2}.$$

Ennél fogva

$$\sum_{k=3}^{98} S_k = \sum_{k=3}^{98} \binom{k-1}{2} \cdot \binom{100-k}{2} = \binom{100}{5} = 75\,287\,520.$$

*Kiss Géza, Kisújszállás,*
*Szántó Tamás, Szeged, Tóth László, Szatmár*

*II. megoldás:* Az $s=k-3$ helyettesítéssel a kiszámítandó összeg az alábbi lesz:

$$\sum_{s=0}^{95} \binom{s+2}{2} \binom{97-s}{2}.$$

Tekintsük az $(1-x)^{-3} \cdot (1-x)^{-3} = (1-x)^{-6}$ azonosságot ($|x|<1$), és fejtsük a binomokat binominális sorba (lásd pl.: N. J. *Villenkin:* Kombinatorika, Műszaki Könyvkiadó 1987, 192—194. oldal):

$$(1) \qquad (1-x)^{-3} = 1 + \binom{3}{1} \cdot x + \binom{4}{2} \cdot x^2 + \ldots + \binom{s+2}{s} \cdot x^s + \ldots$$

$$(2) \qquad (1-x)^{-3} = 1 + \binom{3}{1} \cdot x + \binom{4}{2} \cdot x^2 + \ldots + \binom{p+2-s}{p-s} \cdot x^{p-s} + \ldots$$

$$(3) \qquad (1-x)^{-3} = 1 + \binom{6}{1} \cdot x + \binom{7}{2} \cdot x^2 + \ldots + \binom{p+5}{p} \cdot x^p + \ldots$$

Vegyük (1) és (2) szorzatát. Ebben $x^p$ együtthatója az az összeg, amelynek tagjait úgy kapjuk meg, hogy (1)-ben $x^s$ együtthatóját megszorozzuk (2)-ben $x^{p-s}$ együtthatójával, ahol $s=0, 1, 2, \ldots, p$. Az így kapott összeg megegyezik (3)-ben $x^p$ együtthatójával:

$$\sum_{s=0}^{p} \binom{s+2}{s} \cdot \binom{p+2-s}{p-s} = \binom{p+5}{p}.$$

Feladatunkban $p=95$, felhasználva továbbá a binomiális együtthatók tulajdonságát, a kívánt összeget kapjuk:

$$\sum_{s=0}^{95} \binom{s+2}{2} \binom{97-s}{2} = \binom{100}{5}.$$

*Kamarás Lajos, Pécs*

*III. megoldás:* Az összeget COMMODORE—64 számítógépre írt BASIC program 75 287 520-nak adja 4 másodperces futással.

```
10 FOR K=3 TO 98
20 S = S+(K-1)*(K-2)*(100-K)*(99-K)/4
30 NEXT K:PRINT „A KIVANT OSSZEG:"; S
```

*Bagi István, Barcs, Barabás Sándor, Nyírbátor*

*Megjegyzések:* (1) Az I. megoldásban látott gondolatmenet minden további nélkül általánosítható. Az $n$ elemű (az elemeket növekvő sorrendbe rakva) halmaz $2r+1$ elemű olyan részhalmazainak számát, amelyben $k$ a középső elem:

$$\binom{k-1}{r}\cdot\binom{n-k}{r}$$

adja. Ezért a halmaz összes $2r+1$ elemű részhalmazának számát az $\binom{n}{2r+1}$, illetve a vele egyenlő $\sum_{k=r+1}^{n-r}\binom{k-1}{r}\binom{n-k}{r}$ szolgáltatja.

*Kovács Gabriella, Nagybánya*

(2) Az előbb idézett könyv 136. oldalán található

$$\binom{n+k}{k}=\binom{m}{m}\binom{n+k-m-1}{k-m-1}+\binom{m+1}{m}\binom{n+k-m-2}{k-m-1}+\ldots+$$

$$+\binom{m+n}{m}\binom{k-m-1}{k-m-1}$$

azonosság felhasználásával, az $m=2$, $k=5$, $n=95$ választással éppen a

$$\sum_{k=3}^{98}\binom{k-1}{2}\binom{100-k}{2}=\binom{100}{5}$$

adódik.

*Tóth Sándor, Sárospatak*

*A megoldók száma: 24.*

**1164.** Melyek azok a $p$ és $r$ nem negatív egészek, amelyekre

$$\sin^p x-\sin^r x=\cos^p x-\cos^r x$$

minden valós $x$-re?

*Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely*

*Megoldás:* Az $x=\pi$-re $(-1)^p=(-1)^r$, ezért $p$ és $r$ azonos paritásúak ($p=r=0$ kizárt, mivel $(\sin\pi)^0$ nincs értelmezve, tehát $p$ és $r$ pozitív egészek). Feltehetjük, hogy $p\neq r$. Az adott reláció deriváltjából

$$p\cdot\sin^{p-1}x\cdot\cos x-r\cdot\sin^{r-1}x\cdot\cos x=-p\cdot\cos^{p-1}x\cdot\sin x+r\cdot\cos^{r-1}x\cdot\sin x,$$

ami az $x=\frac{\pi}{4}$-re a

$$(*)\qquad \frac{p}{(\sqrt{2})^p}=\frac{r}{(\sqrt{2})^r}$$

relációt adja. Ez páratlan ($p\neq r$) egészekre ellentmondásra vezet. ($\sqrt{2}$ páros kitevőjű hatványa páros számot ad, míg $p$ és $r$ hányadosa páratlant), tehát $p$ és $r$ párosak.

Tekintsük az $x\mapsto\frac{x}{a^x}$ függvényt. Ennek derivált függvénye $x\mapsto\frac{1-x\ln a}{a^x}$. Ha most $a=\sqrt{2}$ és $x\geqq 4$, akkor $1-x\ln\sqrt{2}<0$, hiszen $\frac{1}{\ln\sqrt{2}}<4$, tehát az $x\mapsto\frac{x}{(\sqrt{2})^x}$ szigorúan csökken, azaz $x\geqq 4$-re *injektív*. Következésképpen, ha $p$ és $r$ legalább 4, úgy (*) alapján $p=r$ kell legyen. Marad a $p\geqq 4$ és $r<4$. Az $r=0$-ra $p=0$ adódik, míg $r=2$-re (*)-ból

$$\frac{p}{(\sqrt{2})^p}=1.$$

Ennek — mint láttuk — egyetlen megoldása van, és ez a $p=4$. Hasonlóan nyerjük, hogy a $p=2$, $r=4$ elégíti még ki a (*) relációt. Végeredményben tehát a $p=r$, a $p=2$, $r=4$ és a $p=4$, $r=2$ lehetőségek vannak. Ezek, helyettesítéssel láthatóan valóban megoldások.

*Sándor József, Farcád*

*A megoldók száma: 9.*

**1165.** Egy konvex poliédert 8 darab egységnyi oldalú szabályos háromszöglap és 2 darab párhuzamos síkú négyzetlap határol. Számítsuk ki a test térfogatát!

*Megoldás:* A feladatbeli $T$ testnek $l=10$ lapja van, éleinek száma fele annyi, mint az összes lapok összes oldalainak $8\cdot 3+2\cdot 4=32$ száma, mert minden él pontosan két lap közös része, vagyis $e=16$. Csak a $T$ konvex esettel foglalkozunk. Ekkor az *Euler*-féle poliéder tétel miatt csúcsainak száma $c=e+2-l=8$. Eszerint $T$-nek nincs más csúcsa, mint a négyzetlapok csúcsai, $T$ tehát azonos az ábrán (l. borítón!) látható testtel, amelynek felső $N_2$ négyzetlapja, az alsó $N_1$ négyzetlaphoz képest 45°-kal el van forgatva a középpontjaikat összekötő egyenes körül.

Tekintsük azt a 4 háromszöglapot, amelyek egy élükkel csatlakoznak $N_1$-hez, és hosszabbítsuk meg a velük szomszédos 3-3 lapot közös pontjukig. A kiszemelt lapok e meghosszabbításokkal egy-egy $H$ tetraédert alkotnak, ezek egymással egybevágók, és $T$-t kiegészítik egy szabályos négyoldalú csonkagúlává (vékonyan rajzolt élek). E csonkagúla $m$ magassága egy olyan szimmetrikus trapéz magassága, melynek alapjai az $N_1$ egyik középvonala, illetve az $N_2$ átlója, szárai pedig egy-egy szabályos háromszög magasságai. Így Pitagorasz tételéből

$$m=\sqrt{\frac{3}{4}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

A csonkagúla alapnégyzetének területe 2, mert oldalai az $N_1$ átlóival egyenlők, így térfogata

$$V_{cs}=\frac{m}{3}(2+\sqrt{2}+1).$$

A $H$ tetraéderek alapterülete $\frac{1}{4}$, így együttes térfogatuk, és végül a $T$ térfogata:

$$V_h=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{m}{3},\quad V_T=V_{cs}-V_h=\frac{m}{3}(\sqrt{2}+2)=\frac{\sqrt{2}+2}{3\sqrt[4]{2}}(\approx 0{,}956).$$

*Barabás Sándor, Nyírbátor*

*Megjegyzés:* Négyzetek helyén tetszés szerinti szabályos $n$-szög lappárral ($n\geqq 4$) és $2n$ darab szabályos háromszöglappal a fentihez hasonlóan képzett poliédereket *antiprizmáknak* nevezik. Ezek a *prizmákkal* együtt ($n$ darab négyzetlap és 2 darab szabályos $n$-szöglap, páronként párhuzamos oldalakkal) a *félig szabályos* poliéderek egy osztályába tartoznak (arkhimédeszi poliéderek: lapjaik szabályos sokszögek, szögleteik egybevágóak).

*A megoldók száma:* 26.

**1166.** Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív $a$, $b$ valós számokra

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n-(\sqrt{ab})^n\geqq\left(\frac{a^{\frac{n}{2}}-b^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}}\right)^2,$$

ahol $n$ pozitív egész szám!

*D. P. Mavló, Moszkva*

*Megoldás:* $n=1$ és $n=2$-re — könnyen látható — az egyenlőség teljesül. Megmutatjuk, hogy $n\geqq 3$ mellett az egyenlőség csak $a=b$ esetén áll fenn. Nevezetesen: azt igazoljuk, hogy ha $n\geqq 3$ természetes szám és $x>0$ valós szám, akkor

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\geqq 2^n-2, \tag{2}$$

és egyenlőség csak $x=1$ esetén teljesül. Ebből ugyanis az $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ helyettesítéssel — átalakítás és rendezés után — a feladatbeli egyenlőtlenséghez jutunk.

A (2) bal oldalát a binomiális tétel segítségével alakítjuk:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot\frac{1}{x^k}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k\cdot\frac{1}{x^{n-k}},$$

tehát

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(x^{n-k}\cdot\frac{1}{x^k}+x^k\cdot\frac{1}{x^{n-k}}\right). \tag{3}$$

Felhasználva, hogy bármely $\alpha>0$ valósra, $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geqq 2$, és egyenlőség $\alpha=1$ esetén áll, a jobb oldali összegben minden $k$-ra $x^{n-k}\cdot\frac{1}{x^k}+x^k\cdot\frac{1}{x^{n-k}}\geqq 2$, vagyis (3)-ból a (2)

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\geqq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot 2=2^n-\binom{n}{0}-\binom{n}{n}=2^n-2$$

következik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha minden $k$-ra

$$x^{n-k}\cdot\frac{1}{x^k}=x^k\cdot\frac{1}{x^{n-k}},\quad \text{azaz}\quad x^{n-2k}=1.$$

Mivel $n-2k\neq 0$ minden $1\leqq k\leqq n-1$-re, ha $n\geqq 3$, ezért $x=1$. Ezzel állításunkat igazoltuk.

*Csorba Ferenc, Győr, Kovács Gabriella, Nagybánya, Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely*

*A megoldók száma: 22.*

## A megoldók névsora (1161—1166.)

Bagi Gábor, Barcs (1161—11663., 1165., 1166.); Bagi István, Barcs (1161.); Barabás Sándor, Nyírbátor (1161—1165., 1166. 2 mód); Bencze Mihály, Brassó (1161—1163., 1166.); Bíró Bálint, Eger (1161—1163.); Bíró Gábor, Kisvárda (1161., 1162., 1163. 2 mód, 1165., 1166.); Boda Miklós, Pécs (1161., 1162., 1165.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1161—1163.); Csorba Ferenc, Győr (1161., 1163., 1165., 1166.); Csúri József, Szeged (1161—1163., 1165., 1166.); Földeák Árpád, Budapest (1161. 2 mód); Földváry József, Papos (1161. 2 mód); Hajna János, Pécs (1161—1166.); Hornyák Pál, Érsekújvár (1161., 1162., 1165., 1166.); Horváth Géza, Zselíz (1161., 1165. 2 mód); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1161., 1162. 2 mód, 1163. 2 mód, 1164—1166.); Kamarás Lajos, Pécs (1161—1166.); Karsai Bálint, Nagyigmánd (1161.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1161., 1166.); Kiss Géza, Kisújszállás (1161—1166.); Kondor László, Dunaújváros (1161. 2 mód); Kovács Gabriella, Nagybánya (1161., 1162., 1163. 2 mód, 1164—1166.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Budapest (1161.); ifj. Kováts Péter, Budapest (1161.); Kun Péter, Szentendre (1161.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1161., 1162., 1165.,); Matekovics Mihály, Arad (1161., 1162.); Mészáros József, Galánta (1161., 1162.); Moyzes Károly, Szeged, (1161.); Sallai István, Zilah (1161., 1162., 1165.. 1166.); Sándor József, Farcád (1161—1164., 1166.); Schutzbach Mártonné, Siófok (1161., 1165, 2 mód); Sebestyén László, Budapest (1161., 1163.); Simon József, Csíkszereda (1161., 1162., 1165.); Solymár Zoltán, Kalocsa (1161., 1166.); Steierlein István, Balatonfüred (1161., 1165.); Sütheő Cecília, Szombathely (1161.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (1161—1163., 1165., 1166.); Számadó László, Budapest (1161., 1163., 1165.); Szántó Tamás, Szeged (1163., 1165.); Szenkovits Ferenc, Székelyudvarhely (1161—1166.);, Takács Dezső, Egyházaskozár (1161.); Tóth György, Szolnok (1165.); Tóth László, Szatmár (1161., 1163., 1166.); Tóth Sándor, Sárospatak (1161., 1162. 2 mód, 1163. 2 mód, 1165.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1161., 1162., 1163. 3 mód, 1164., 1166. 2 mód); Varga István, Nagyszalonta (1161., 1162., 1163. 2 mód, 1164. 2 mód, 1165., 1166.); Zalán Péterné, Budapest (1161., 1163., 1165.); Zsidó-Nagy György, Kolozsvár (1161., 1162., 1165., 1166.).

Lapunk 1987. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük:

Barabás Sándor, Nyírbátor
Bencze Mihály, Brassó
Dr. Csorba Ferenc, Győr
Hajna János, Pécs
Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza
Kamarás Lajos, Pécs
Kiss Géza, Kisújszállás
Szenkovits Ferenc, Székelyudvarhely
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely
Varga István, Salonta

*Imreczéné—Urbán—Reiman*

**Fejtörő feladatok felsősöknek**

Szakköri füzet

A könyv az általános iskolai felső tagozatos szakkörök számára készült, de a matematika iránt érdeklődőbb tanulókat is segíti az önálló munkájukban.

Az Iskolarádió „Törd a fejed" című 3 éves műsorának és a Kis Matematikusok Baráti körei 3 évben rendezett versenyeinek feladatait tartalmazza. A feladatok megoldásának közléséhez magyarázatok fűződnek. A feladatok az új matematika tantervhez, annak témaköreihez kapcsolódnak. (R.sz. 19 030)

*Tatár István*

**Feladatok az úttörő matematikusok vetélkedőin I.**

Általános és középiskolai tanulók számára

„Célunk egyrészt az, hogy olyan feladatcsokrot adjunk a kartársaink kezébe, amelyet a mindennapos munka során akár a tanulók tudásának megerősítésére, akár annak fejlesztésére fel tudnak használni. Másrészt az, hogy megörökítsük és hűen megőrizzük egy jelentős kezdeményezés, egy nemzetközileg is egyedülálló vetélkedőrendszer történetét, húsz év gyűjtőmunkájának eredményét."

*Tatár István*

**Feladatok az úttörő matematikusok vetélkedőin II.**

Általános és középiskolai tanulók számára

Ebben a II. kötetben ismertetjük az úttörő matematikusok vetélkedőin a járási, városi, kerületi, valamint a megyei, fővárosi döntők feladatait és azok megoldásait. Az I. és a II. kötet hű képet ad az 1966—84. közti időszakban megrendezett versenyeinkről. A könyvet általános és középiskolai tanulóknak ajánljuk. (R.sz. 19 234/II.)

*Dr. Hámori Miklós*

**Tanulás és tanítás számítógéppel**

Ez a kiadvány nem technikai, nem a programnyelv oldaláról, hanem a pedagógiai és a pszichológia aspektusából dolgozza fel a témát. A szerző a számítógéppel való tanítás és tanulás didaktikáját alkotta meg. A könyvben mellékletként szerepel néhány BASIC nyelvű program is. (Rsz. 52 983)

*Dr. Ábrahám—Bedő—Czétényi—*
*ifj. Frigyesi—Juhász—dr. Korányi*

**Matematika az előkészítő tanfolyamok számára**

A most befejeződött matematika tantervi reform az előző évek anyagához képest tartalmi és formai szempontból lényeges eltérést jelent. A főiskolák és egyetemek nappali tagozatára, de régebben érettségizett, valamint az esti és levelező tagozatára jelentkező hallgatók ezt a tartalmi és formai változást e könyv segítségével adaptálni tudják.

A könyv tömören tartalmazza az új középiskolás tananyagot. A felvételizők részére nagy segítséget jelent a definíciók és tételek összegyűjtése, valamint a minden témakörhöz kidolgozott feladatok. Ezért az érettségire való felkészülést is segítheti. (R.sz. 81 303)

*Ujvári István*

**Felkészülés és felzárkózás matematikából**

Általános iskolai szakköri füzet

Ez a szakköri füzet elsősorban a 14—15 éves tanulók számára készült abból a célból, hogy
— általános iskolai tanulmányaik utolsó félévében a középiskolai matematikára való felkészülést segítse,
— a nyári szünidőben ezeket az ismereteket némiképpen konzerválja, és
— a középiskola I. osztályában hétről hétre mozgósítsa az új anyag tárgyalásához szükséges előismereteket.

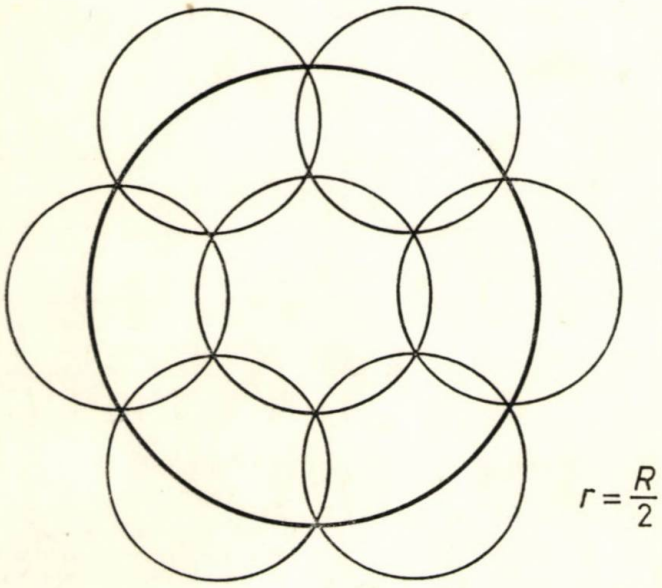
E hármas célkitűzésnek a füzet egy-egy része kíván eleget tenni. (R.sz. 19 029)

**Ára: 7,— Ft**

# A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VESZPRÉM MEGYEI PEDAGÓGIAI SZOLGÁLAT KÖNYVTÁR




1988. XXXV. évfolyam

4 szám

# A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE. DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-2667 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszki út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

**ISSN 0461—3902**


Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
*a)* személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM


*C. Németi Eszter:* Gondolatok az óvodai és alsó tagozatos matematikai nevelés fejlesztéséről ..... 97
*Radnainé Szendrei Julianna:* A szakközépiskolai matematika-tantervek. A jelen és a jövő vizsgálata ..... 101
*Tóth Imre:* Az írásbeli munkák korszerűbb javítása ..... 106
*Dr. Kántor Sándorné:* Tanítási-tanulási eszközök a háromdimenziós vektorok tanításához a gimnáziumok harmadik osztálya számára ..... 110
*Róka Sándor:* Konstruktív feladatok szakkörre ..... 118
*Dr. Scharnitzky Viktor:* A műszaki főiskolák 1987. évi Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenye ..... 122
*Bencze Mihály:* Két módszer páratlan rendű bűvös négyzetek szerkesztésére ..... 123
Az 1988. évi májusi iskolai matematika írásbeli érettségi tételek ..... 126
*Balku Jenő—Dr. Hartosné Dr. Magyar Judit:* Ambrózy Géza megyei középiskolai matematikai tehetségkutató verseny.. 126
Új könyvek ..... IV.


СОДЕРЖАНИЕ


*Ц. Немени Эстер:* О развитии математического воспитания детей в детских садах и в начальных классах ..... 97
*Раднаине Сендреи Юлианна:* Программы по математике для профессиональных училищ в настоящее время и пожелания на будущее ..... 101
*Тот Имре:* Усовершенствование метода проверки письменных работ ..... 106
*Д-р Кантор Шандорне:* Средства обучения при толковании трёхдимензионных векторов в третьем классе гимназии ..... 110
*Рока Шандор:* Конструктивные задачи для кружков ..... 118
*Д-р Шарнитзки Виктор:* О математическом соревновании им. Хайоша Дьёрдя для ВТУЗов (1987 г.) ..... 122
*Бенце Михай:* Два метода составления нечётных «магических» квадратов .... 123
Задачи письменного экзамена по математике на аттестат зрелости в 1988 г. 126
*Балку Енё, д-р Хартоше д-р Мадьяр Юдит:* Областное соревнование «Поиск талантов» в средней школе им. Амбрози Геза ..... 126
НОВЫЕ КНИГИ ..... IV.

C. NEMÉNYI ESZTER
főmunkatárs
OPI Matematikai Osztály

# Gondolatok az óvodai és alsó tagozatos matematikai nevelés fejlesztéséről

Az óvodai és alsó tagozatos matematikai nevelés-oktatás továbbfejlesztését két nagyobb egység részeként kezeljük. Egyrészt együtt kell gondolkodni az összes nevelési terület és összes tantárgy vonatkozásában az azonos korosztályokat és egyazon pedagógusokat egyszerre érintő kérdésekben. Elsősorban a „kezdőszakaszban" fontos ez a közös fejlesztési feladatvállalás. Másrészt a matematikai nevelés-oktatás fejlesztésének egészében kell megjelölni a helyét, szerepét, lehetőségeit és feladatait.

## *A matematikai nevelés-tanítás fejlesztése a kezdő szakaszban mint a nevelés-tanítás egészének része az adott korosztályban*

A tantervben, taneszközökben és a nevelési-tanítási gyakorlatban egyaránt *jobban kell érvényesülniük a fejlődéslélektani* (sőt: fiziológiai) *szempontoknak, követelményeknek.*

Észre és tudomásul kell vennünk, hogy nem elsősorban „teljesítményzavarokkal" küzd az iskolarendszerünk. Az olvasásban, írásban, számolásban megmutatkozó teljesítmény-egyenlőtlenségek (esetleg általános gyengeségek) *tünetek.* A tüneti problémák megoldásához azonban nem vezet el az adott tevékenység fokozott gyakorlása. *A valódi probléma* a tantervek, taneszközök, iskolavezetés, felügyelet, megszokott pedagógiai gyakorlat és továbbtanulási feltételrendszer által *meglehetősen egységesen képviselt* (bár nem mindig bevallott) *oktatásközpontúságban, teljesítményközpontúságban keresendő.* Ez az alapállás nemcsak a gyerekek, gyerekcsoportok érdeklődését, kíváncsiságát hagyja legtöbb esetben figyelmen kívül, hanem valódi emberi értékeiket, életkorukból adódó és ettől független személyes (differenciált) adottságaikat, fiziológiai, pszichikai állapotukat és fejlődésüket, képességeiket és már megszerzett tudásukat is.

Mai iskolarendszerünk (jelen objektív és szubjektív feltételei között) nem vállalja, nem tudja vállalni, hogy egyszerre járuljon hozzá minden gyerek személyiségének kibontakoztatásához, képességeinek optimális kifejlesztéséhez (miközben nyugodt, örömteli gyerekkort biztosít számukra az iskolai életben), és alakítsa ki a legfontosabb ismereteket, amelyek birtokában képességeik szerint tudnak és akarnak tovább is tanulni.

A fejlesztés ilyen átfogó problémakörének megoldását nem vállalhatja egy-egy tantárgy tartalmi fejlesztése. A fejlesztés-, nevelésközpontú szemléletet azonban vállalja az Óvodai Nevelési Program Matematika fejezete és a korrigált alsó tagozatos matematika-tanterv. Ez mutatkozik meg a következőkben:

*a)* Elsajátítandó ismeretek helyett (4. osztályban részben mellett) tevékenységrendszerekben írjuk le a tananyagot. Olyan tevékenységekben, amelyek bizonyos szemléletmódok kialakulásáért, tapasztala-

tok személyes átéléséért, tanulási, problémamegoldási módszerek, gondolkodásmódok kialakulásáért, fogalmak tartalmának kiérlelődéséért felelősek, valamint olyanokban, amelyek során biztos, jól használható tapasztalatokhoz, ismeretekhez jutnak a gyerekek.

*b)* Szavakban számonkérhető reprodukciók helyett (mellett) tevékenységekben megnyilvánuló megértést, ismeretek alkalmazását jelöljük meg követelményként, illetve óvodában követelmények helyett az óvónőt tájékoztató fejlettségi szintekről, fejlesztési lehetőségekről beszélünk. A szóbeli (írásbeli) kifejezőkészséget fejlesztenünk kell, de elvárásainkban is tekintettel kell lennünk a gyerekek fejlettségi szintjére!

*c)* Módszerként valamiféle elmélet (szabályok, tételek, meghatározások...) memorizáltatása, számonkérése és tudatos alkalmazása helyett javasoljuk a valóságos problémák megoldásának konkrétumokban való sokszori cselekvő bejárását, amellyel nemcsak egyedi ismeretekig juttathatjuk el a gyerekeket, hanem megtanulják gyakorlati módon az ismeretszerzés útját is.

Ezek a programszinten megfogalmazott állásfoglalások azonban csak akkor válhatnak hatékony erőforrásokká a továbbfejlesztésben, ha az alsó fokon megvalósuló tolerancia, türelem nem válik büntetendővé a felsőbb osztályokban, ha a lassabban érő tanulókat, a gyengébb értelmi képességű gyerekeket nem éri fokozott hátrány az iskolarendszer minden későbbi fokán.

A szemlélet intenzív formálása mellett *olyan szervezeti feltételrendszerre vonatkozó fejlesztésben lehet gondolkodni, amely által a kezdő szakasz* (óvodától 3. osztályig) *gyermek-, nevelés- és fejlesztésközpontúbbá válhat.*

*a)* Fontos lenne megismertetni a tanítókkal (iskolavezetőkkel, szaktanácsadókkal) az óvoda-iskolai szervezeti formával kapcsolatos tapasztalatokat, amelyek alapján ki-ki képes lenne mérlegelni egy ilyen szervezeti forma vállalását.

*b)* Szorgalmazni kell az egytanítós rendszer visszaállítását 3. osztályig (esetleg éppen az előbbi óvoda-iskolai formában).

*c)* Elő kellene írni és biztosítani kell a lényegesen kisebb létszámú osztályok működtetését, amelyekben valóban lehetséges a gyerekek egyéni adottságainak, személyiségének, képességeinek, vágyainak megismerése, fejlesztése, a közösségformálás és a közösség felhasználása hatékony nevelő tényezőként.

*d)* Ígéretesnek látszik az a kísérlet, amely a lassabban fejlődő tanulók számára kétéves első osztályokat szervez. Ennek a gondolatnak másik megvalósulása lehetne (esetleg vegyes korcsoportos tanítási formában) az osztályhatárok teljes feloldása a 3. osztály végéig. Ennek a formának előnye (bár a pedagógus számára tagadhatatlan nehézsége is) lenne az, hogy a jelenleginél lényegesen jobban alkalmazkodhatna a gyerekek eltérő haladási, tanulási és fejlődési üteméhez. A 4. osztályba lépés feltételrendszere lenne igen részletesen, pontosan és szigorúan megszabva, de az nem, hogy ezt 3 vagy 4 (esetleg 5) év alatt kell-e elérni.

*e)* Mindehhez ki kell munkálni — az összes nevelési területre egységesen, s ezen belül külön-külön a tantárgyi részterületekre — azoknak az alapvető (szociális, mozgásos, intellektuális, akarati, érzelmi stb.) képességeknek a jól meghatározható rendszerét, fejlesztésének optimális lehetőségeit (többféle lehetséges struktúrában) és kijelölni az

elérendő szintjeit, melyek az egyre önállóbb tanulásnak feltételét jelentik a felsőbb osztályokban.

*f)* Meg kell kezdeni a tanító- és óvónőképzésben a jelöltek felkészítését a gyermekekre, gyerekcsoportra (gyerekközösségre) orientált pedagógiai munkára — a túlzott tantárgyi és tanításközpontú munka helyett. Ez nem jelenti a szakmai színvonal csökkentését, de a tantárgyak átszínezését, fejlesztésközpontúbb szakdidaktikai feldolgozását igen.

A kezdő szakasz továbbfejlesztésével kapcsolatban tehát elsősorban kutatásokra, kipróbálásokra, a helyi kezdeményezések figyelemmel kísérésére, esetleges (alternatív) elterjesztésének támogatására, tehát hosszabb távú alapozó munkára van szükség. A feltételek jobb biztosítása a pedagógiai munka szemléletének befolyásolása, alternatív fejlesztési kezdeményezések ösztönzése (kellő szakmai felkészültséghez és központilag megfogalmazott kritériumokhoz kötve) azonban a legrövidebb távú fejlesztési program része lehet.

A kezdő szakaszban az összes nevelési-fejlesztési területen egységesen megfogalmazott alapelvek, célok és feladatok alapján a gyakorlat minél intenzívebb bekapcsolásával ki kell alakítani a „minimális kompetenciát" jelentő képesség- és ismeretrendszert. Ennek meghatározása után ki kell dolgozni *a tevékenységrendszerek olyan lehetséges alternatíváit, amelyekkel e képességek optimálisan fejleszthetők, a legszükségesebb ismeretek elsajátíthatók.* Ezen belül központilag kell meghatározni a tevékenységek egy szűkebb (kb. 70%-os) körét, amelyet minden alternatív programnak tartalmaznia kell. A fennmaradó sávban a helyi, egyéni, alkalmi igények, szükségletek szerint a pedagógusok (gyerekek, szülők) határozhatják meg a tartalmat is a módszereken kívül.

Az alsó tagozatos és óvodai pedagógusok nagy része ma még nem tudja vállalni a döntés felelősségét arról, hogy egy adott tantervi anyag, egy taneszköz jól képviseli-e a tantárgy cél- és feladatrendszerét. Ez nem is hárítható rájuk. A programok, taneszközök megválasztásához pedig kötelesek vagyunk a kínálatot pontosan, objektív mérce szerint „felcímkézni": mire alkalmas, mire nem, mit vállal a pedagógiai folyamatban, milyen szerepet nem is kíván betölteni.

Fontos lenne olyan kisebb terjedelmű, az egész nevelési-oktatási folyamatba beépíthető részanyagok kidolgozásán is gondolkodni, amelyek szerepe egy-egy pedagógiai probléma megoldását eredményezheti. Ezeknek az elsősorban nem írásos eszközöknek egyik része a lassabban fejlődő gyerekek speciális (esetleg apróbb lépésekre bontott) képzését segíthetné, másik része hozzájárulhatna a jobb képességű, esetleg kifejezetten tehetséges tanulók optimális fejlesztéséhez. (Ezeknek az anyagoknak a pontos helyét is meg kell jelölni a folyamatban: mikor, milyen céllal, melyik tevékenységsor helyett — esetleg előtt vagy után — töltik be szerepüket.)

### *Az óvodai és alsó tagozatos matematikai nevelés-oktatás a teljes matematikai nevelés-oktatás folyamatában*

E tekintetben az 1978-as matematikatantervek nagy lépést tettek a megelőző tantervekhez képest: egységes szemlélet alapján fogalmazták meg az általános iskola feladatait, tananyagát és követelményrendszereit. (A gyakorlatban felismert hibák, hiányosságok korrekcióját készítettük el a múlt tanév során, s ennek alapján tanítanak már ebben az évben. A fejlesztés részének kívánjuk tekinteni a már több éve kidolgozott továbbfejlesztett Óvodai Nevelési Program elterjesztését, amely részint a gyerekek igényeihez illeszkedik a megelőzőnél jobban, részint pedig az alsó tagozatos munkával képez szorosabb egységet tartal-

mában és a tanulás módszereit tekintve. Pontosabban: az alsó tagozatos munkát kívánjuk még jobban az óvodában alkalmazott, kisgyerekekhez igazított módszerekkel megvalósítani!)

*Az alsó és felső tagozat* tantervi és szemléleti összehangolása tekintetében azonban még vannak tennivalók — nemcsak a pedagógiai gyakorlatban. Bizonyára simábbá tehető az átmenet egy lényegesen intenzívebb kezdő szakasszal, főképpen, ha a 4. és 5. osztályt felölelő átvezetőszakaszban is jobban érvényesül a fejlődéslélektani törvények figyelembevétele.

A fő problémát abban látjuk, hogy még mindig *nem sikerült megtalálni a képességfejlesztés, nevelés, szemléletformálás és az ismeretek kialakításának optimális arányát,* viszonyát. Nemcsak könnyebb és „látványosabb" munka bizonyos ismeretek elsajátíttatása, mint a nevelés-fejlesztés, hanem a pedagógus és a szélesebb közvélemény értékrendjében is legtöbb esetben lényegesen nagyobb értéket képvisel egy-egy ismeret (ha az önálló megszerzésének és alkalmazásának képessége nem alakult is ki), mint a jó geometriai szemlélet, függvényszemlélet, problémaérzékenység, problémamegoldó képesség, a kreativitás..., bizonyos ismeretek megléte nélkül. Természetesen az optimális arány kimunkálása mindig a pedagógiai gyakorlatban valósul meg, de hosszabb távon mégis befolyásolható. (Például igen nagy hatású befolyásoló tényezők azok a felmérési eszközök, amelyeket valamilyen „központ" dolgoz ki: hiszen a legmegfoghatóbb formában fejezik ki, hogy a „központ" mit tekint fontosnak. Ha pl. az alsó tagozatosok felmérései többségükben a számolási készségeket vizsgálják, akkor semmiféle szóbeli vagy írásos állásfoglalások nem lesznek képesek elfogadtatni, hogy a matematikai nevelésnek vannak más fontos területei is; ha fontos is a számolni tudás, mégsem ez az egyetlen, a legfontosabb.) *A másik ellentét* — kapcsolatban az előbbivel — *a kialakítás, megérlelés, kimunkálás hosszabb időt igénylő, komplex pedagógiai munka és a* (szinte máról holnapra való) *megtanulás között van.* A kezdő szakaszban a matematikának csaknem minden területén az ismeretek, képességek, rutinok, módszerek pedagógus által megtervezett és irányított kimunkálása folyik, amelyben a gyerek „felelőssége" a munkában való aktív részvételben merül ki. A felső tagozaton módosul a tanuló és tanár szerepe. Az ismeretszerzés (segítséggel vagy önállóan) egyszer (néhányszor) bejárt útja végén a gyereknek kell önállóan emlékezetbe vésnie az ismeretanyagot. Az elsajátítás felelőssége (megértéstől a reprodukálásig) a gyerekre hárul. Ez fontos és természetes változás is. A nehézséget legtöbb esetben az jelenti, hogy ez a hangsúly-áttevődés máról holnapra, sok esetben a felső tagozatba lépés pillanatában kellene hogy megtörténjen anélkül, hogy megtanulna a gyerek írott anyagból tanulni, hogy megtanulná a tapasztalatok rendszerezését, általánosítását, elvonatkoztatását. E tekintetben mind az alsó tagozatnak, mind a felsőnek van tennivalója. Az alsó tagozatnak jobban fel kell készítenie a gyerekeket az információk okos feldolgozására (az értő olvasástól kezdve a specializáláson — példák és ellenpéldák keresésén —, újabb problémák felvetésén keresztül a megértett szöveg értelemszerű memorizálásáig). A felső tagozatnak pedig — tudomásul véve, hogy ez a folyamat fejlődéslélektani törvények szerint nem zárulhat le az alapozó szakaszban, nemcsak hosszabb-rövidebb türelmi időt kell hagynia a gyerekeknek, amíg képesek lesznek a „játszadozás" után komolyan tanulni, hanem folytatnia kell azt a munkát, amelyben valóban képesek lesznek a gyerekek az absztrakciókkal való tevékenységek értelmes elvégzésére.

A korrekció első lépése zárult le: elvégeztük a tanterv korrekcióját. A bevezetést hosszabb folyamatnak tekintjük, ugyanis annak elrendelése után a megvalósulásnak a taneszközök és gyakorlat korrekcióját is magában kell foglalnia. Tehát először be kell fejezni a korrigált tantervhez illeszkedő taneszközök készítését. Emellett a gyakorlati pedagógiai munka jobbítása érdekében szükséges az óvónők és tanítók folyamatos ön- és továbbképzését segíteni.

A korrekcióból azonban csak úgy nőhet ki a folyamatos fejlesztés, ha nyugodt, reális terv szerint *elvégezzük a jelenleg érvényes tantervek, taneszközök, pedagógiai gyakorlat elemzését, értékelését* elegendően széles körben gyűjtött tapasztalatok alapján. Ennek a vizsgálatnak feladata:

1. Feltárni *a ténylegesen működő terveket, elveket, vállalt célokat,* hogy az eredményességet összevethessük az előidéző tényezőkkel.
2. *Reális képet alkotni a tanterv(ek) megvalósíthatóságáról,* ennek szubjektív és objektív feltételeiről, a használt taneszközök hatékonyságáról, hibáiról, hiányosságairól (és ennek nyomán a jobb modellek megtervezése), a gyakorlat eredményeiről és nehézségeiről.
3. *Kidolgozni a matematikatanítás céljait, feladatait megfelelően reprezentáló értékmérőket,* amelyek egységes vonatkoztatási rendszerét alkothatják az esetleges alternatív programoknak.

A vizsgálatnak felméréseket is kell tartalmaznia, de nem kizárólagos formájaként. Felmenő rendszerű vizsgálatról kell gondolkodni, hogy a hosszabb távon kimunkálható eredmények is kimutathatók legyenek.

*A feltáró, értékelő munka mellett folytatni és szélesíteni kell*

*a)* azt a kutatást, amely a zsebszámológépek használatának alsó tagozatos lehetőségeivel, módszereivel és tartalmával foglalkozik;

*b)* azt, amely a helyes differenciálás hatékony módjainak kidolgozásához vezet.

RADNAINÉ SZENDREI JULIANNA
főmunkatárs
Országos Pedagógiai Intézet

## A szakközépiskolai matematika-tantervek. A jelen és a jövő vizsgálata

Az 1978. évi tantervreform óta tíz év telt el. Ez alatt az idő alatt sok változás történt az iskolában. Hogy csak a legfontosabbakat említsem: áttértünk az ötnapos munkahétre, létrejöttek a műszaki szakközépiskolák, és életbe lépett az új oktatási törvény.

Ezek a változások mindegyike befolyással volt nemcsak a közvetlen iskolai munkára, hanem a tantervek megvalósíthatóságára is.

Az ötnapos munkahét legérzékenyebben a szakközépiskolákat érintette. A feszített munkatempó egyaránt próbára tette a tanárok és a diákok erejét. A rendkívüli megterhelés az iskolai munka komolyságát veszélyeztette, hiszen a gyerekektől nem vehettük zokon, ha „lazítani" igyekeztek. A terhelés növekedésének az is következménye lett, hogy a tanárok egyre kevesebb házi feladat megoldását tartották lehetségesnek, elsorvadtak — idő és energia hiányában — az iskolai szakkörök, jobbára csak a főiskolai, egyetemi előkészítők maradtak meg.

Egy következő óraszám-módosítás

igyekezett a terheken segíteni, de ez azzal járt, hogy a matematika összóraszáma is csökkent, mégpedig egyes szakmák esetében jelentősen. Ennek következtében a tantervek átcsoportosítására, súlypontok áthelyezésére került sor. Tekintettel arra, hogy az évek során kiadott útmutatók az új iskolák, kezdő tanárok számára nem hozzáférhetők, ezért A Matematika Tanításában szeretnénk közreadni ezeket a módosításokat.

A hely gazdaságos felhasználása érdekében csak a tantervben szereplő címek szerepelnek, általában a tananyag részletes felsorolása nélkül.

Az itt következő átcsoportosításokon kívül valamennyi iskolatípusban lehetséges egy-egy témakör átcsoportosítása, ha azt a szakmai munkaközösség az adott iskolatípus szakmai tantárgyai miatt szükségesnek tartja. Kérjük, hogy minden ilyen esetben az illetékes szaktanácsadótól kérjenek ehhez támogatást.*

**I.** Az eredetileg heti 5—5—4—2 óratervű tantervet 4—4—3—3 óraszámban tanulók számára a következőképpen módosítjuk a 100—33 raktári számú tantervet:

*I. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Ponthalmazok | kb. | 20 óra. |
| Függvények | kb. | 20 óra. |
| Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek | kb. | 25 óra. |
| Hatványozás, törtek | kb. | 30 óra. |
| Lineáris kétismeretlenes egyenletrendszerek | kb. | 15 óra. |
| Egybevágósági transzformációk I. | kb. | 20 óra. |
| Egyenesre vonatkozó tükrözés. | | |
| Pontra vonatkozó tükrözés. | | |
| Eltolás, vektorok. | | |
| A síkidomok osztályozása, fontosabb tulajdonságaik összegyűjtése. | | |
| Összesen: | | 130 óra. |

Az I. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

*II. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Pitagorasz tétele, négyzetgyök, a számfogalom bővítése | kb. | 25 óra. |
| Egybevágósági transzformációk és alkalmazásaik | kb. | 20 óra. |
| Pont körüli elforgatás | | |
| A hasonlóság és alkalmazásai | kb. | 40 óra. |
| A szögfüggvények általánosításai* | kb. | 15 óra. |
| Másodfokú függvények, egyenletek | kb. | 25 óra. |
| A hatványozás általánosítása, exponenciális függvény | kb. | 10 óra. |
| Összesen: | | 135 óra. |

A II. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

*III. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Hatvány, gyök, logaritmus** | kb. | 15 óra. |
| Trigonometriai feladatok | | |
| Egyenletek, egyenletrendszerek | kb. | 25 óra. |
| Koordináta-geometria | kb. | 30 óra. |
| Differenciálszámítás | kb. | 30 óra. |
| Összesen: | | 100 óra. |

A III. osztályban 3 dolgozat íratását javasoljuk.

* A tananyag átcsoportosításának megfelelően módosulnak az egyes években a követelmények is.
Az * és ** témaköröket ugyancsak a munkaközösség egyetértése és a szaktanácsadó beleegyezése esetén ki lehet egymással cserélni.

*IV. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Számsorozatok | kb. | 20 óra. |
| Integrálszámítás | kb. | 30 óra. |
| Rendszerező összefoglalás | kb. | 40 óra. |
| Összesen: | | 90 óra. |

A IV. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

**II.** A 100—33 r. sz. tantervet 9—8—6—6 ciklusonkénti óraterv szerint tanulók számára:

*I. osztály*
változatlan

*II. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Pitagorasz tétele, négyzetgyök, a számfogalom bővítése | kb. | 25 óra. |
| Pont körüli elforgatás | kb. | 15 óra. |
| Az egybevágóság fogalma | kb. | 5 óra. |
| A hasonlóság alkalmazásai | kb. | 40 óra. |
| A szögfüggvények általánosításai* | kb. | 15 óra. |
| Másodfokú függvények, egyenletek | kb. | 25 óra. |
| A hatványozás általánosítása, exponenciális függvény | kb. | 10 óra. |
| Összesen: | | 135 óra. |

A II. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

*III. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Hatvány, gyök, logaritmus** | kb. | 15 óra. |
| Trigonometriai feladatok | | |
| Egyenletek, egyenletrendszerek | kb. | 25 óra. |
| Koordináta-geometria | kb. | 30 óra. |
| Differenciálszámítás | kb. | 30 óra. |
| Összesen: | | 100 óra. |

A III. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

*IV. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Számsorozatok | kb. | 20 óra. |
| Integrálszámítás | kb. | 35 óra. |
| Rendszerező összefoglalás | kb. | 40 óra. |
| Összesen: | | 95 óra. |

A IV. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

**III.** A 100—34. r. sz. tantervet 4—3—3—2 heti óraterv, valamint ciklusonkénti 9—7/8—5/6—3/4, illetve 7/8—5/6—5/6—3/4 szerint tanulók számára.

*I. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Ponthalmazok | kb. | 20 óra. |
| Függvények | kb. | 20 óra. |
| Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek | kb. | 25 óra. |
| Hatványozás, törtek | kb. | 30 óra. |
| Lineáris kétismeretlenes egyenletrendszerek | kb. | 15 óra. |
| Egybevágósági transzformációk | kb. | 20 óra. |
| Összesen: | | 130 óra. |

*II. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Az egybevágósági transzformációk alkalmazásai | kb. | 20 óra. |
| Pitagorasz tétele, négyzetgyök, a számfogalom bővítése | kb. | 20 óra. |
| A hasonlóság és alkalmazásai | kb. | 20 óra. |
| A szögfüggvények általánosítása | kb. | 15 óra. |
| Másodfokú függvények, egyenletek | kb. | 25 óra. |
| Összesen: | | 100 óra. |

*III. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| A hasonlóság és alkalmazásai | kb. | 20 óra. |
| Hatvány, gyök, logaritmus, számítási segédeszközök | kb. | 25 óra. |
| Trigonometriai feladatok, egyenletrendszerek | kb. | 25 óra. |
| Számsorozatok | kb. | 15 óra. |
| Koordináta-geometria — kiegészítő anyag | | |
| Összesen: | | 85 óra. |

*IV. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás | kb. | 25 óra. |
| Rendszerező összefoglalás | kb. | 30 óra. |
| Összesen: | | 55 óra. |

## IV. A 100—35. r. sz. tantervet heti 3—2—3—2 óraterv szerint tanulók számára.

*I. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Ponthalmazok és alapvető geometriai ismeretek | kb. | 20 óra. |
| Függvények | kb. | 15 óra. |
| Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek | kb. | 20 óra. |
| Hatványozás, törtek I. | kb. | 25 óra. |
| Lineáris kétismeretlenes egyenletrendszerek | kb. | 15 óra. |
| Összesen: | | 95 óra. |

*II. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Hatványozás, törtek II. | kb. | 10 óra. |
| Pitagorasz tétele, négyzetgyök, a számfogalom bővítése | kb. | 20 óra. |
| Egybevágósági transzformációk | kb. | 15 óra. |
| Másodfokú függvények, egyenletek | kb. | 20 óra. |
| Összesen: | | 65 óra. |

*III. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Az egybevágósági transzformációk alkalmazásai | kb. | 20 óra. |
| A hasonlóság és alkalmazásai | kb. | 25 óra. |
| Trigonometria I. | kb. | 20 óra. |
| Hatvány, gyök, logaritmus | kb. | 25 óra. |
| Koordináta-geometria — kiegészítő anyag | | |
| Összesen: | | 90 óra. |

*IV. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás | kb. | 25 óra. |
| Rendszerező összefoglalás | kb. | 30 óra. |
| Összesen: | | 55 óra. |

## V. A 100—36. r. sz. tantervet 4—4—5—5 heti óraterv szerint tanulók számára.

*I. osztály*

A tananyagot kérjük az osztály felkészültségének, illetve a szaktárgyak igényeinek megfelelően a rendelkezésre álló órakeretben szétosztani.
Az I. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

*II. osztály*

A tananyagot az I. osztályban történtek figyelembevételével kérjük arányosan szétosztani.
A II. osztályban 4 dolgozat íratását javasoljuk.

*III. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| A hasonlóság és alkalmazásai | kb. | 20 óra. |
| A szögfüggvények általánosítása | kb. | 15 óra. |
| Hatvány, gyök, logaritmus | kb. | 25 óra. |
| Trigonometriai feladatok. Egyenletek, egyenletrendszerek | kb. | 20 óra. |
| Koordináta-geometria | kb. | 30 óra. |
| Differenciálszámítás | kb. | 35 óra. |
| Kombinatorika, valószínűségszámítás I. | kb. | 20 óra. |
| Összesen: | | 165 óra. |

A III. osztályban 5 dolgozat íratását javasoljuk.

*IV. osztály*

| | | |
|---|---|---|
| Számsorozatok | kb. | 30 óra. |
| Integrálszámítás | kb. | 50 óra. |
| Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika | kb. | 30 óra. |
| Rendszerező összefoglalás | kb. | 40 óra. |
| Összesen: | | 150 óra. |

A IV. osztályban 5 dolgozat íratását javasoljuk.

A tananyag órai feldolgozását megkönnyíti, hogy Czapáry Endre megkezdte a tankönyvsorozat átdolgozását, amelynek I. osztályos anyaga (könyv és feladatlapok) az 1988—89. tanévben már az osztályokba került. Ez a tankönyvsorozat a III. és IV. osztályok részére is folytatódik, évenként jelenik majd meg egy-egy kötete.

Az általános iskolai matematika-tanterv korrekciójának követeként sor kerül majd a szakközépiskolai tanterv korrekciójára is. Ennek tervezett anyagát a középiskolai szaktanácsadók megvitatták, és előreláthatólag a tanév során jelenik meg. A Czapáry Endre által írt tankönyvsorozat illeszkedik ezekhez a tantervekhez, de egy-egy könyv több tantervi változat anyagát tartalmazza majd.

A korrigált tanterv anyagának kialakításakor figyelembe vettük azokat a tantervjavaslatokat, amelyeket iskolai szakmai és matematikai munkaközösségek készítettek a középtávú pedagógiai kutatások témakörben. Nem állt módunkban figyelembe venni azonban azt a szinte egyöntetűen megfogalmazott kívánságot, amelyik egyrészt a matematika I. osztályos óraszámát kívánta emelni, valamint a szakközépiskolai matematikatanításban meg kívánja teremteni a széles körű fakultáció lehetőségét.

Természetesen éppen ezek a jelzések jelölik ki további törekvéseink, küzdelmeink útját, amelyek csupán a szakközépiskola esetleges szerkezetmódosításával valósíthatók meg. Ezek közé kell sorolnunk azokat az elképzeléseket is, amelyek a műszaki szakközépiskolákra vonatkoznak, elsősorban pedig az V. évben a matematika legalább fakultatív szinten való megjelenésére.

A korrigált tanterv lényegesebb átalakítást kíván tenni a törzsanyag — kiegészítő anyag szerkezetben a matematikát nagyobb óraszámban tanulók számára. Központi kérdés az analízis tanítása, amelyet nem szeretnénk leszűkíteni arra a kérdésre, hogy tanítsunk-e differenciál- és integrálszámítást vagy sem. Tények szólnak amellett, hogy a differenciál- és integrálszámítás tanítása igen sok iskolában csak nagy erőfeszítések — esetleg felesleges erőfeszítések árán valósulhat csak meg. Ez indokolja, hogy ott a téma csak a kiegészítő anyagban szerepeljen. Ez nem jelentheti azonban azt, hogy az analízis gondolkodásmódjával, látásmódjával se ismerkedjenek meg a tanulók.

Törekvéseink azok, hogy már az I. osztálytól kezdve nyíljék alkalom a fogalomkör megismerésére, az adott anyagba illeszkedő igen egyszerű feladatok segítségével.

Még mindig nem tudjuk pontosan megfogalmazni, de mindannyian érezzük annak az igényváltozásnak a jellegét, amelyet a számítástudomány jelenléte és fejlődése éppen a matematikatanítástól vár. A numerikus módszerek általánossá válása igényelheti a numerikus analízis mind szélesebb rétegekhez való eljuttatását, és ettől a matematika nagyon sokat nyerhet is. Kísérleti törekvések próbálják letapogatni, hogy melyek azok a témakörök, ahol a zsebszámológép és a személyi számítógép akár segédeszközként, akár demonstrációs eszközként való felhasználása elősegíthetik az eddiginél esetleg könnyebben és mélyebben a matematikai fogalmak kialakítását.

A zsebszámológépek használata iskolai — akár dolgozatíratási — szokásainkat is átalakítja. Nagyobb teret kell szentelnünk a számolási pontosság kérdésének. Segítenünk kell a zsebszámológép „okos" felhasználását. Természetesen a zsebszámológép egyúttal újabb matema-

tikai problémaszituációk tálalására is alkalmas lehet. Egyes témakörökben kifejezetten kívánatos az, hogy állást foglaljunk a kerekített értékek használatáról. Mit jelenthet az, hogy egy sorozat elemszámára körülbelül 45-öt kapunk? Mikor mondjuk azt, hogy ez azt jelenti, hogy a sorozatnak 45 tagja van, és mikor azt, hogy a feladatnak nincs megoldása. Megelégszünk-e azzal, hogy két egyenes metszéspontja helyett olyan pontot adjunk meg, amelyik ehhez a ponthoz „közel" van, anélkül, hogy megbecsülnénk azt a távolságot, amelyet a számítási pontosság szab meg az „eredeti" metszéspont és a „számított" metszéspont között.

Hasonló elmélkedéseket valamennyi tanártársam nap mint nap folytat gyakorlati munkája során. Szeretném, ha A Matematika Tanítása helyet adna annak, hogy módszertani „fegyvertárunk" ilyen kérdésekben is gyarapodjék, minél több tanár hasonló tapasztalatait és megoldási javaslatait megismerhessük.

TÓTH IMRE
vezető szaktanácsadó
Nyíregyháza

## Az írásbeli munkák korszerűbb javítása

Napjaink felgyorsult ütemű fejlődéséhez az szükséges, hogy az élet minden területén megfelelő változás történjen.

A dolgozat (amit felmérőnek, témazárónak is nevezünk) íratása és javítása, javíttatása a matematikatanár alapvető feladatai közé tartozik. A tudáspróbák írása az alsó osztályokban kezdődik, a dolgozatoké pedig 5. osztálytól elvezet az érettségiig, kevesebbek számára egészen a diplomáig, ezért az eddigieknél többet kell foglalkoznunk ezen tevékenységünk minél jobb végrehajtásával.

A didaktika tankönyvek általánosságban minden tantárgyra vonatkozóan nagyon röviden említik az írásbeli ellenőrzés formáit és ezzel kapcsolatos néhány tennivalót. A dolgozatjavításról az egyik szerző ezt írja: „Az órán az általános hibákat alaposan meg kell beszélnünk a tanulókkal", majd arra utal, hogy ezekkel a kérdésekkel az egyes szakmódszertanok foglalkoznak. Az általános iskolai matematikatanítás módszertana vagy egyáltalán nem, vagy csak nagyon érintőlegesen foglalkozik az írásbeli munkák javításának kérdéseivel.

A Matematika Tanítása című folyóirat legutóbb valamikor az 50-es évek idején foglalkozott ezzel a témával egy tanulmány keretében. Azóta mind az elméleti, mind a gyakorlati szakemberek aránylag keveset vették elő ezt a kérdést, hiszen a megújult matematikaanyagra való felkészülés minden energiát lekötött. Több évtizedes tapasztalatom igazolja azt, hogy a dolgozatjavítás módszertani kérdéseivel szükséges foglalkoznunk. A jobbítás érdekében befektetett munkánk a tanulók jobb eredményeiben feltétlenül tükröződik.

A dolgozatíráshoz a 70-es években készültek standardizált tesztek, amelyek nem váltak eléggé közismertté, és így nem segítették kellően a gyakorló pedagógusokat, de szerintem a nagyobb gondot a javítás jelenti.

A dolgozatokhoz, a felmérésekhez a tanárok többsége mindig szeretett volna valamilyen központi feladatsort kapni, ami mind ez idáig elmaradt, mert több elfogadható érv is van ellene. A sok közül egyet említek. Központi feladatsorok birtokában nagyon sok tanár az adott feladatok mechanikus tanítására, gyakorlására összpontosítaná figyelmét, és nem a megértett anyag minél jobb elmélyítésére, alkalmazására törekedne. A most készülő — országos jellegű — standardizált tesztek közrebocsátása után is több ellenérvvel számolnunk kell, de nagy a valószínűsége annak, hogy azok több segítséget, mint hátrányt fognak jelenteni a matematikatanárok mindegyikének.

A dolgozatíráshoz azért eddig is volt valamilyen segítség a tanároknak. A Forrainé-féle módszerrel dolgozók készen kapták a felmérések (dolgozatok) anyagát. Ezt azok is megismerték, akik annak idején nem próbálták ki ezt a módszert vagy később kezdték pályájukat. Megyénkben nagyon sokan dolgoztak ezzel a módszerrel és megismerték annak pozitív és negatív hatásait, amelyeknek egy része még ma érezhető a mindennapi gyakorlatban.

A készen kapott feladatok és azok teljes mértékű felhasználása — ami a kísérleti munkában részt vevők számára kötelező volt — nem egy esetben vezetett alacsony szintű teljesítményekhez. Különösen gondot okozott az, hogy hol legyen az a határ a teljesítményben, amit nem lehet elfogadni és elégtelen érdemjegyet kell adni. A 30 százalékos alsó határt többször is mérsékelni kellett azért, hogy az elégtelenek száma ne legyen olyan magas.

A feladatrendszerek — amelyek jelenleg nagyon jól segítik az 5—6. osztályokban folyó munkát — is tartalmaznak teljesen önálló, írásbeli munkára tervezett feladatsorokat, elég sok tanítási órára. Ezekben nincsenek A és B variánsok — mint ahogyan az általában szokásos —, mert céljuk nem az érdemjegy gyűjtésének elősegítése, hanem a tanulók tudásának feltárása.

Sok helyi kezdeményezés is született arra vonatkozóan, hogy megyei, városi, körzeti vagy csak egy iskolára kiterjedő feladatsorok készültek az illetékes munkaközösségek közreműködésével, melyeket az érdekeltek megkaptak. A megyei ún. bázisiskola munkaközösségének bevonásával mi is készítettünk egységes felmérő feladatsorokat, azokból minden iskolának egy-egy példányt elküldtünk. A közben történt változásokat, a legutóbbi tantervi korrekciót is figyelembe véve újra tervezzük megyei feladatsorok készítését.

Nyíregyháza városban éveken keresztül egy-egy iskola — mindegyik évben más — vállalta a dolgozatokhoz szükséges feladatok elkészítését, és azt stencilezetten megkapták a többiek is, ami az egységes szemlélethez, az egységes pontozással sok segítséget nyújtott, de az eredményességet illetően sok probléma adódott, mert az iskolák adottságai egy városon belül is nagyon eltérőek. (23 iskola.) Az egy iskolán belüli felkészültségi szint is jelentősen eltér, különösen akkor, ha valamilyen oknál fogva — tagozatos osztály stb. — homogén csoportok alakulnak ki, tehát ahány osztály van, annyiféle feladatsor alkalmazása a leginkább célravezető.

A tudáspróbák, a témaközi felmérők javítására, az eredmények megbeszélésére, a hibák visszajelzésére a tanmenetekben általában egész tanítási óra nincsen tervezve, de a tanárok jelentős része fél, vagy néha egész tanítási órát is ezekre fordít. Ha csak a dolgozatokat — évi négyet — vesszük figyelembe, akkor azok is a matematikaórák 3—4 százalékát teszik ki, de ha a tudáspróbákat, a témaközi felmérőket, az egyéb írásbeli feladatsorokat is beszámítjuk — melyeknek a javítása feltétlenül szükséges —, akkor ezek összessége már a matematikaóráknak közel 10 százalékát jelentik, ami nem elhanyagolható időtartam, a többszörösen csökkentett és elég szűkre szabott matematikaórákból. Ezekre a feladatokra mindannyiunknak kötelessége a lehető legjobban felkészülni.

A dolgozat írásakor és azok javítása közben is önálló munka folyik, ez az általános vélemény. Elég a tanár felkészüléséhez az, ha a feladatsorokat összeállítja, a megírt dolgozatokat kijavítja. A javítási órák módszere valahogyan nem került a tanári nézőpont lényeges elemei közé, ezért azok általában úgy történtek, mint évtizedekkel ezelőtt, nagyon is hagyományos módon, ami semmiképpen sem haladó.

Milyen is volt — és sajnos maradt — ez a módszer? A tanár a javítás megkezdése előtt ismerteti az elért eredményeket, utal a hibákra és elkezdődik a javítás. A hi-

bátlanul dolgozó tanulók valamelyike kimegy a táblához, felírja a megoldást, az osztály pedig másolja azokat a tábláról, annak megfelelően, hogy milyen hibát követtek el. A feladatsorok általában két variánsban készülnek, így egyszerre két tanuló is ír a táblánál, hogy mindegyik tanuló „dolgozhasson", azaz mindkét oszlop másol.

Ilyen javítási mód elég gyakori, amiről több évtizedes tanári, felügyelői és tanácsadói munkám során magam is meggyőződtem. Az 1986—87. tanévben egy egyetemi végzettségű szakos kollégánál is ezt tapasztaltam.

A fentiekben leírtakra nagyon igaz Kelemen László megállapítása: „Közismert a hagyományos oktatás tipikus modellje: a tanár magyaráz vagy egy tanuló (rendszerint egy kiváló) felel, illetve dolgozik a táblánál — a többi pedig mint néző, passzív szemlélője vagy követője a többiek munkájának" — írja A gondolkodás nevelés az általános iskolában című könyvében.

Az említett hagyományos óravezetéssel a tanárok döntő többsége nem ért egyet, de felvetődik bennük a kérdés: Hogyan tovább? Milyen módszer alkalmazása lenne a legcélravezetőbb a javítások során? Tömör, egyértelmű válasz adása a kérdésre nagyon is egyszerű, két szóval is kifejezhető.

Javításkor a tanulók ne *másoljanak*, a tanár pedig mindenképpen végezzen *differenciálást*. Ez a mondat a lényeget kifejezi, de a gyakorlatban ezek végrehajtása nem olyan egyszerű.

Az elért érdemjegyek sem adnak pontos képet a differenciálásra, hanem az egyes feladatokban elért megoldási szintek. Nagyon egyértelmű a differenciált munka azokkal a tanulókkal, akik hibátlanul dolgoztak, számuk elég kevés egy-egy osztályban vagy egyáltalán nincsen is.

A hibátlanul dolgozókhoz sorolhatók azok a tanulók, akik egy-egy logikai lépést vagy egy-egy műveletet hibáztak el és a feladatra ránézve azonnal belátják tévedésüket. Számukra külön feladatokat kell adnia a tanárnak.

Akik kevés hibát követtek el, azok részére is kell külön feladat, csak az előzőnél kisebb mértékben vagy ugyanannak a feladatsornak egy részével kell elkészülniük, és útbaigazítást is kell, hogy kapjanak az önálló munkához.

A legnagyobb gondot azok a tanulók jelentik, akik sok hibát követtek el és több feladat megoldásakor, vagy azok mindegyikénél nem jutottak el a jó végeredményhez. Ezeknek a tanulóknak a többsége még a magasabb osztályokban sem képes önálló munkára, ezért csak a tanár útbaigazítása, irányítása alapján dolgozhatnak. A javítás megkezdése előtt a hibás feladathoz hasonló feladat közös megbeszélése után ezek a tanulók is két csoportban dolgozhatnak, akik megértették a saját feladatukat az analógia alapján, azok önállóan dolgozhatnak tovább, a tanárok közvetett irányításával, a többiek csak irányítással, közvetlen segítséggel.

Amennyiben az egyéni segítségre szorulók száma magas, akkor a tanár munkáját a legjobban dolgozó tanulók is segíthetik. Ilyen esetekben nagyon kell vigyázni arra, hogy a jó tanuló ne vállalja át a megértést, a gondolkodást, a megoldást a hibázó tanulótól.

Problémát jelent az „A" és a „B" variáns, mert ezáltal a feladatok megduplázódnak, de kedvező az, hogy ezek a feladatok lényegében nem térnek el egymástól, azonos súlyozásúak — azaz egyező pontértékűek —, ezért az útbaigazításhoz elég azok egyikének a megbeszélése.

Azokban az osztályokban, ahol sok a jó megoldó, ott tanulópárok is kialakíthatók a javításhoz. A tanulópárok munkájában a közvetett segítés döntő a javítás eredményességét illetően.

Azt nagyon jól tudja minden pedagógus, hogy a tanulók munkatempója, adottsága, felkészültsége nagyon széles skálán mozog. Az átlagot 2 évvel meghaladók, de ugyanannyival lemaradók is

lehetnek az osztályban. Ezt is figyelembe kell venni, ami azt jelenti, hogy aki a legkevesebbre képes, az nem fog eljutni az óra végére az adott 4—6 feladat megoldásáig útbaigazítással sem. Ezért is fordul elő az, hogy ha a tanuló a hibátlan feladatokat lemásolta, akkor „eleget tett feladatának". Ezzel kapcsolatban az a véleményem, hogy inkább javítson ki a tanuló egy feladatot úgy, hogy azt megértette és olyan feladatot meg tud oldani, minthogy lemásoljon öt feladatot, de nem tudja, hogy mit miért csinált.

A hiba felismeréséhez jól hasznosíthatók az olyan szóban megoldható feladatok, amelyek ugyanolyan műveleti sort tartalmaznak, hasonló a felépítésük vagy az írásbeli feladattal azonos gondolkodásra késztetik a tanulókat.

Újabb kérdés vetődik fel a lemaradók kapcsán. Mi történik akkor, ha a tanulók a javítást az óra végére nem tudják befejezni? Mind a javasolt tanmenetekben, mind a tanárok munkájában kétféle elgondolás alakult ki. Az egyik szerint a javításra elég egy óra, a másik szerint kettőre van szükség, a valóság pedig az, hogy vannak tanulók, akiknek az egy óra is sok, vannak tanulók, akiknek a kettő óra is kevés.

Második javítási órára egy-egy dolgozat után szinte egyetlen iskolában sincsen úgy szükség, hogy az osztály minden egyes tanulója javítson. Ez az óra adhatja meg a lehetőséget a be nem fejezett javításokra. Itt is kell élni a differenciálás lehetőségével, és azok a tanulók, akik a témakör követelményeit teljesítették, tovább haladhatnak.

A jövő iskolájában remélhetően egyszer majd eljutunk odáig, hogy az a tanuló, aki az adott osztály követelményeit nem teljesítette, nem haladhat tovább. Amikor ez megvalósítható lesz, akkor arra is lehetőséget kell adni, hogy aki hamarabb teljesíti az adott követelményeket, az korábban kezdhessen magasabb osztályban tanulni. Az új oktatási törvény alapján ezeknek a lehetőségeknek a kibontakozása megindulhat.

A tartalmi értékelés is sokat vitatott kérdés. A pontok összességéből — melyeket egy-egy feladatra ad a tanár — alakul ki az érdemjegy. Az elért teljesítmény alapján helytelen lenne országosan vagy megyénként meghatározni azokat az elérendő százalékokat, amelyek szerint „egységes" lenne az érdemjegy mértéke. Az alsó határ általában 20—30% között mozoghat, 30%-ot meghaladó mértéket igen kevés — tagozatos — osztályban adhatunk. A skála többi része is akkor jó, ha esetenként mozgatható. A felső határnál érdemes magasra emelni a mércét, 90—95%-os teljesítmény legyen jeles. Az iskolák önállóságának kibontakozásakor mind jobban kell élnünk ebben a kérdésben is a tanári szabadság adta lehetőséggel, mert az iskolák környezeti adottságaik révén sok feltételben eltérnek egymástól.

A dolgozatok értékelésekor sokan elhagyják a külalak minősítését, ami akkor kezdődött el, amikor megszűnt az azokra adandó osztályzat kötelezősége. A tanulók egész személyiségének alakításához, a pontos, rendes munka megkövetelésével így is mind többet kell tennünk.

A külalak minősítésének szorgalmazására azért van szükség, mert a „gyorsuló idő" nagy terhelése miatt, a megváltozott körülmények következtében nem törődnek eléggé a dolgozatok külső formájával, elrendezésével, hibátlan szép írásával tanítványaink.

A szaktanár ezeket a minősítéseket is felhasználhatja a tanulók magatartásának és szorgalmának megítélésekor. Sajnos erre kevés esetben kerül sor ott is, ahol a dolgozatok minősítése rendszeres. A dolgozatok minősítését érdemjegyben kifejezni könnyebb, mint szöveges értékelést adni a végzett tevékenységről, amely az ötfokú érdemjegynél részletesebb, pontosabb információt ad.

A dolgozatírás és javítás sikerét a jó előkészítés, a gyakorlás közben szerzett pontos visszajelzés adja meg, amivel a sok elégtelen érdemjegy megelőzhető. Valamikor a középiskolákban volt sok

elégtelen matematikadolgozat, ami más tárgyakból is előfordult. Újabban már az általános iskolákban is tapasztalható, hogy egy-egy dolgozat majdnem teljes sikertelenséget hoz, mert a tanulók jelentős része elégtelent kap. 70%-ot meghaladó elégtelennel is találkoztam.

Mi tehát a feladatunk? Egy biztos, hogy a jobb teljesítmények érdekében, a jelzett hagyományos módot elhagyva, korszerűbb módszerekkel járulhatunk hozzá az eredményesebb matematikatanításhoz.

---

Úgy illik, hogy az olvasó ne csak a borítólap belső oldaláról értesüljön arról, hogy a lap szerkesztője megváltozott. Hódi Endre, aki 1974-től nyugdíjbavonulásáig az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Osztályának vezetője volt és 1988 közepéig A Matematika Tanítása szerkesztését is végezte, ez utóbbi tisztjét — munkáját is átadta nekem. A lap Olvasói nevében is köszönet illeti majd másfél évtizedes áldozatos munkájáért, azokért az erőfeszítéseiért, amelyet A Matematika Tanítása folyamatos megjelenéséért, színvonalának megőrzéséért végzett. Munkájára, tanácsaira továbbra is számítunk, tagja marad lapunk szerkesztőbizottságának.

*Urbán János*

---

DR. KÁNTOR SÁNDORNÉ
adjunktus
KLTE Debrecen

## Tanítási-tanulási eszközök a háromdimenziós vektorok tanításához a gimnáziumok harmadik osztálya számára

A matematika-tanterv szerint a gimnáziumok 3. osztályában kerül sor a háromdimenziós vektoroknak és a vektorok skaláris, illetve vektoriális szorzatának a tárgyalására. Ezt nyilvánvalóan másképpen tárgyalják a különböző tankönyvekben, és más-más mélységben a normál vagy a fakultatív tantervű osztályokban.

A térbeli koordinátákkal rendelkező háromdimenziós vektorokkal való számolás, a térbeli koordináta-rendszerben való tájékozódás sok tanuló számára jelent problémát, mivel térbeli látást és gondolkodást igényel. A térszemlélet fejlesztésére, a térbeli látás kialakítására kell törekednünk, és ehhez igen hasznosak és célszerűek a ténylegesen elkészített térbeli ábrák. Tapasztalatom szerint a tankönyvek ábrái és a tanár axonometrikus rajzai nem tudják pótolni a kirakható, szétszedhető és egyben a valódi térbeli viszonyokat tükröző tanítási-tanulási eszközöket. Segítségükkel meggyorsítjuk a fogalmak tiszta és világos kialakulását, az új fogalmak szemléletes geometriai jelentésének a felfedezését, felismertetjük és tudatosítjuk a tanulókban a vektorok körében bevezetett új műveletek — a skaláris és vektoriális szorzat — műveleti tulajdonságait.

A bemutatásra kerülő eszközsorozat a tanítási gyakorlatban kipróbált és bevált eszközöknek a tantervi követelményeket kielégítő továbbfejlesztése. A gimnázium bármelyik típusú — normál, fakultatív A, fakultatív B — harmadik osztályában mindegyik tankönyvhöz (Korányi E; Bartal A.—Pálfalviné; Hajnal I. —Nemetz T.—Pintér L.) fel lehet használni a térbeli vektorok komponensekre való felbontásához, a vetületvektor fogalmának a kialakításához, két vektor skaláris, illetve vektoriális szorzatának a bevezetéséhez és tulajdonságainak a megtanításához. A térbeli ábrák segítségével kitekintést lehet nyújtani a három vektorral végezhető műveletekre és azok szemléletes

geometriai jelentésére is. (Pl. Munkatankönyv III. fakultatív A 62. oldal, Matematika, III. fakultatív A 421. oldal 103. feladat, Matematika III. fakultatív B 34. oldal 4.)

*Az eszközrendszer általános jellemzése*

Az eszközsorozat a következő 8 egységből áll, amelyekhez a felhasználási célnak megfelelően több, kisegítő alkatrész is csatlakoztatható:

1. Térbeli koordináta-rendszer.
2. Térbeli ábrák a vetületvektor kiszámításához és a skaláris szorzat definíciójához.
3. Térbeli ábra a skaláris szorzat disztributív tulajdonságának bizonyításához.
4. Eszközsorozat két vektor vektoriális szorzatának definíciójához és geometriai jelentésének megállapításához.
5. Eszköz az $\mathbf{e}\times\mathbf{a}$ ($|\mathbf{e}|=1$) vektoriális szorzat kiszámításához.
6. A vektoriális szorzat disztributivitását bemutató tanítási-tanulási eszköz.
7. Térbeli szemléltető ábra a kifejtési tételhez.
8. Eszközsorozat három vektor vegyes szorzatának definíciójához és geometriai jelentésének megállapításához.

Az egyes eszközök, illetve térbeli ábrák feketére festett 4 és 3 mm átmérőjű autogénhegesztő pálcákból készültek. A vastagabb átmérőjű pálcák szimbolizálják a vektorokat. A vektorok irányát és nagyságát színes — zöld, sárga, fehér, piros — papírból készült nyilak jelzik. Az egységvektorhoz mindig piros színű nyíl tartozik.

A nyilak kétféle változatban készültek:
*a)* fixen elhelyezve (felragasztva),
*b)* mozgathatóan (mágneses lapocskákra ragasztottuk a nyilakat, így azok a pálcák mentén eltolhatók, tehát a vektorok nagysága, irányítása is változtatható).

A vektorok háromféleképpen csatlakoznak egymáshoz:
*a)* hegesztéssel,
*b)* forgatást biztosító csatlakozással,
*c)* csavarmenetes csatlakozással.

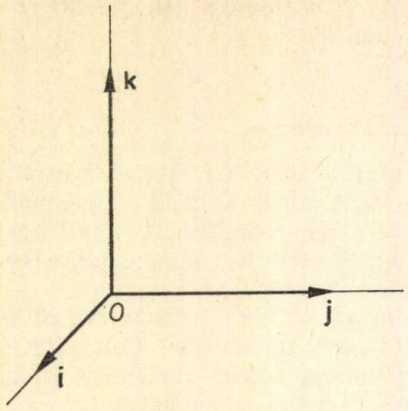
Ez utóbbi biztosítja a vektorok irányításának, vagy a rendszer jobb-, illetve balsodrásának cseréjét. A vékonyabb pálcák a szerkesztővonalak szerepét töltik be.

Az eszközöket fehér, műszaki rajzlappal borított hungarocellemezre helyezzük rá. A lemez anyaga lehetővé teszi, hogy a térbeli ábrákat a rajtuk levő szúró tüskék segítségével a lemezbe való beszúrással rögzíthessük. A műszaki rajzlapra, ha szükség van rá, rajzolni is lehet (pl. az 5. eszköznél előre felrajzoltunk a rajzlapra egy derékszöget).

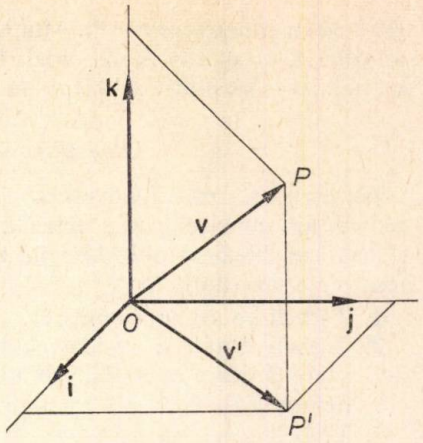
*Az eszközök részletes leírása és felmérési módja*

**1. eszköz.** *Térbeli koordináta-rendszer az* **i, j, k** *egymásra merőleges jobbsodrású rendszert alkotó egységvektorokkal (1. ábra).*
Tartozékai: műszaki rajzlappal borított hungarocellemez, különböző hosszúságú forgatható vektorok, szúró tüskével ellátott adott méretű derékszögű háromszögek, élvázas téglatest modell.

Ez az eszköz az **i, j, k** bázisvektorok által felfeszített, mereven rögzített térbeli koordináta-rendszer (Matematika III. fakultatív A tankönyv 72. ábra), amelynek *O* origójában forgatást biztosító csatlakozás van. Ide akaszthatók be a 10 cm, 20 cm, illetve 30 cm hosszúságú forgatható vektorok, amelyek segítségével különböző térbeli vektorokat állíthatunk be és bonthatunk komponensekre a koordináta-rendszerben. *(2. ábra)*




*1. ábra*

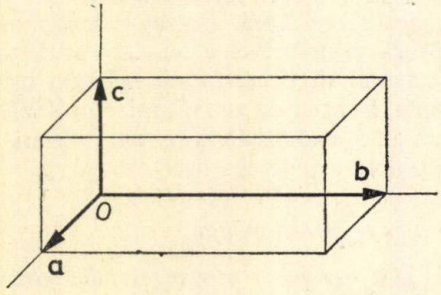



*2. ábra*

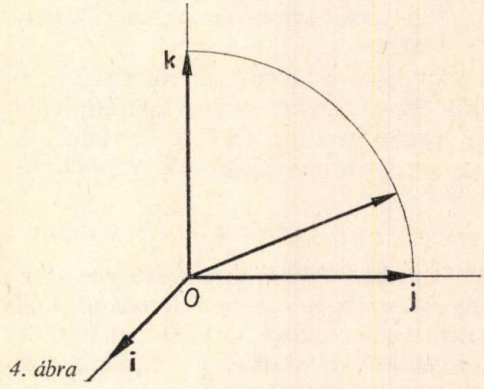
Az *O* ponthoz csatlakoztathatók a szúrótüskékkel ellátott *OPP'* derékszögű háromszögek *(5. ábra)*, amelyek lényegében az előbbi forgatható vektorok merev, hegesztett változatai. Az *OPP'* háromszögeket különféle módon helyezhetjük be a koordináta-rendszerbe. A háromszögeket több méretben készítettük el, hogy alkalmasak legyenek a háromdimenziós vektorok koordinátáinak a kiszámolására. A háromszögek adatait a következő táblázat mutatja:

| *OP* | 20 cm | 30 cm | 30 cm | 30 cm | 30 cm |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 50° | 30° | 40° | 45° | 60° |

Az élvázas téglatest modell, amelynek oldalai 10 cm, 15 cm és 25 cm hosszúak, segítséget nyújt a testátlóvektornak az oldalvektorokkal való kifejezéséhez *(3. ábra)*.




*3. ábra*




*4. ábra*

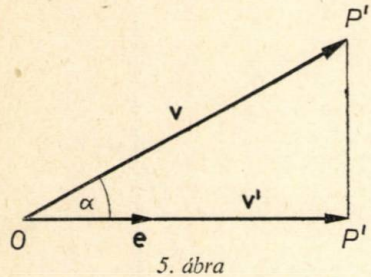
A térbeli koordináta-rendszer felhasználható a vektoriális szorzat tárgyalásakor is. Ha a koordináta-rendszer *O* kezdőpontjába egy forgatható egységvektort csatlakoztatunk, akkor segítségével megmutathatjuk, illetve kiszámíthatjuk a bázisvektorok $\mathbf{i}\times\mathbf{i}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{j}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{k}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}$ vektoriális szorzatainak az értékeit, amelyekre a vektoriális szorzat koordinátáinak a meghatározásánál van szükség *(4. ábra)*.

Az 1. eszköz segítséget jelent az $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{k}$, $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$ vektorok megszerkesztésénél. (Matematika III. fakultatív A 176. oldal 1. feladat)

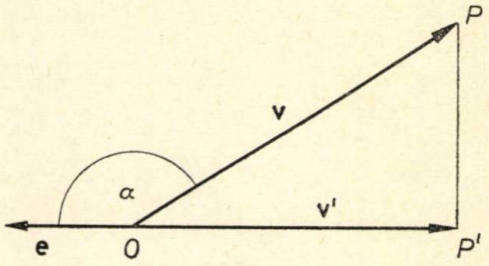
A téglatest élvázas modellje *(3. ábra)* alkalmas az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ vektorok szemléltetésére, ahol az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok a téglatest egy csúcsából kiinduló oldalvektorokat jelentik. (Matematika III. fakultatív A 176. oldal 2. feladat)

**2. eszköz.** *Térbeli ábrák a vetületvektor kiszámításához és a* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}$ $(|\mathbf{e}|=1)$ *skaláris szorzat definíciójához.*

Az $OPP'$ derékszögű háromszögek felhasználhatók a $\mathbf{v}$ vektor vetületvektorának a kiszámításához is. A $\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}$ skaláris szorzat bevezetéséhez is ugyanezeket a háromszögeket használjuk, ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{e}$ hegyesszöget zár be *(5. ábra)*. Azt az esetet, amikor $\mathbf{v}$ és $\mathbf{e}$ szöge tompaszög, úgy valósítjuk meg, hogy az $OPP'$ háromszög $O$ pontjában levő csavarmenetes csatlakozásába egy $OP'$-vel ellentétes irányú $\mathbf{e}$ egységvektort csavarozunk be *(6. ábra)*.



*5. ábra*



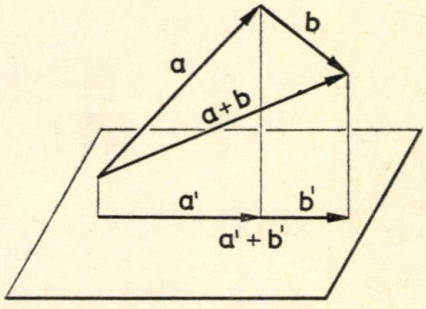
*6. ábra*

**3. eszköz.** *Térbeli ábra a skaláris szorzat disztributív tulajdonságának a bizonyításához (7. ábra).*

Ez a tanítási-tanulási eszköz az

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{e}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}$$

azonosságot mutatja be.



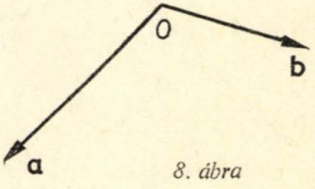
*7. ábra*

**4. eszköz.** *Eszközsorozat két vektor vektoriális szorzatának definíciójához és geometriai jelentésének megállapításához (8—14. ábrák).*

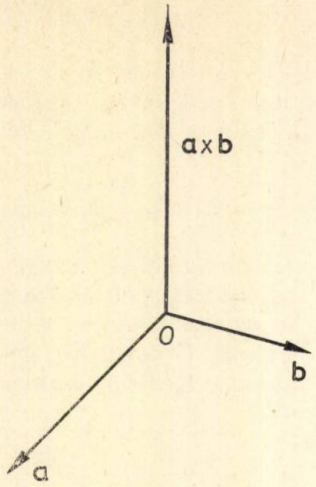
Az eszközsorozat segítségével kis lépésekre bontva, fokozatosan építhetjük fel a két vektor vektoriális szorzatának fogalmát, illetve meg tudjuk mutatni a vektoriális szorzat szemléletes geometriai jelentését és műveleti tulajdonságait. A fogalomalkotás tisztasága itt különösen fontos, mert mind a Munkatankönyv III. fakultatív A 62. oldal 8. feladatának ábrája, mind a Matematika III. fakultatív B 32. oldal 27. ábrája hibás.

A fogalomalkotás fázisai a következők:

*a)* Adott két nemkollineáris, közös kezdőpontú vektor, amelyeket a-val és b-vel jelölünk *(8. ábra)*.



*8. ábra*



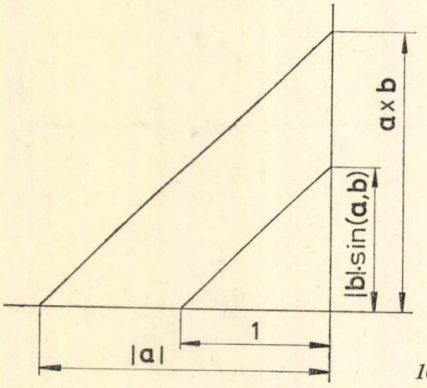

9. ábra

*b)* Az $O$ pontba becsavarozzuk az **a** és **b** síkjára merőleges $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektort, amelyre teljesül, hogy

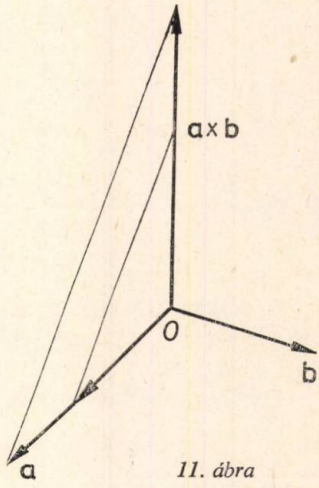
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

illetve az **a**, **b**, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak *(9. ábra)*.

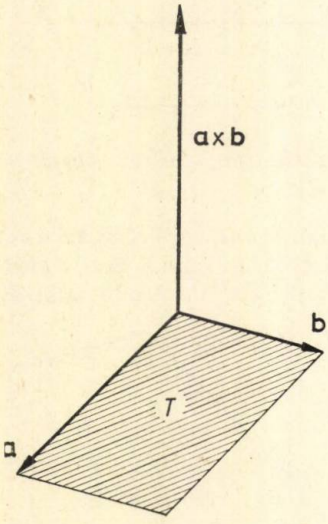
*c)* Az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ abszolút értéket egy segédháromszög segítségével szerkesztettük meg *(10. ábra, 11. ábra)*.




10. ábra




11. ábra




12. ábra

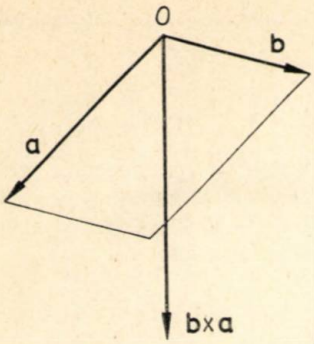
*d)* Megállapítjuk, hogy az **a** és **b** vektorok által felfeszített paralelogramma területe éppen

$$T = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

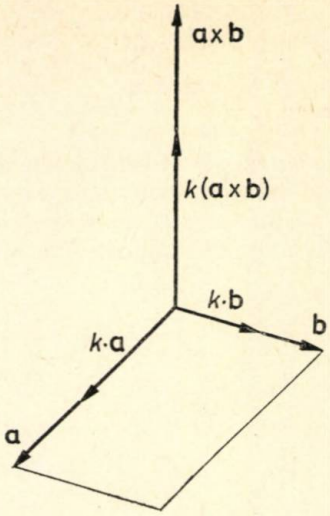
és ezzel megkaptuk a vektoriális szorzat szemléletes goemetriai jelentését *(12. ábra)*.

*e)* Az $O$-beli csavarmenetes csatlakozás lehetővé teszi a vektoriális szorzat alternáló tulajdonságának a bemutatását *(13. ábra)*:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$




*13. ábra*




*14. ábra*

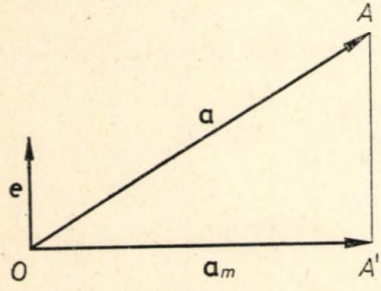
*f)* A mozgatható nyilak segítségével a *9. ábrán* látható eszköz alkalmas a vektoriális szorzat

$$k(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = k\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times k\cdot\mathbf{b} \quad (k\in\mathbf{R})$$

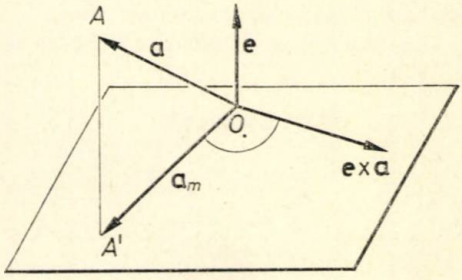
tulajdonságának az igazolására is.

**5. eszköz.** *Eszköz az* $\mathbf{e}\times\mathbf{a}$ $(|\mathbf{e}|=1)$ *vektoriális szorzat kiszámításához.*

Az 5. eszköz a Munkatankönyv III. fakultatív A 64. oldal 13. feladatának megoldásához szükséges. Az **e**, **a**, és $\mathbf{a}_m$ vektorokat az *O* pontban úgy hegesztettük össze, hogy az *O* pontba beakasztható legyen egy $\mathbf{a}_m$-mel egyenlő nagyságú forgatható vektor *(15. ábra)*.




*15. ábra*




*16. ábra*

Az *OAA'* háromszöget a szúrótüskék segítségével ráhelyezzük a tartó lemezre, ahová előzőleg egy derékszöget berajzoltunk úgy, hogy a derékszög csúcsába kerüljön az *O* pont és az egyik szárára az *A'* pont *(16. ábra)*.

Ha a tanuló az $\mathbf{a}_m$ vektort *O* pont körül $+90°$-kal elforgatja, akkor megkapja az $\mathbf{e}\times\mathbf{a}$ vektort, sőt felfedezheti az $\mathbf{a}_m=(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\times\mathbf{e}$ összefüggést is.

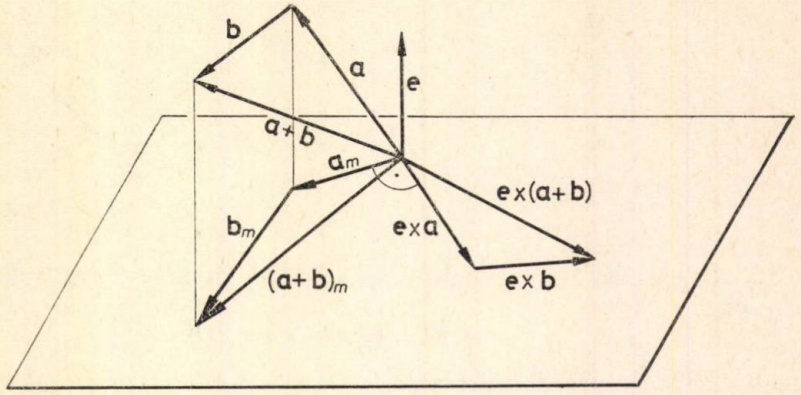
Az 5. eszköz használatának célja egyúttal a vektoriális szorzat disztributív tulajdonsága felismerésének az előkészítése.

**6. eszköz.** *Tanítási-tanulási eszköz a vektoriális szorzat disztributív tulajdonságának bizonyításához (17. ábra).*

A 6. eszköz az

$$\mathbf{e}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{e}\times\mathbf{a}+\mathbf{e}\times\mathbf{b}$$

disztributív törvényt mutatja meg a térben. A disztributív tulajdonságra a tankönyvek általában hivatkoznak, de a bizonyíthatóságára csak utalnak. A 6. eszköz segítségével aránylag könnyen megy a bizonyítás. Ezt segíti elő az is, hogy készítésekor az 5. eszközt építettük tovább, de most már nem mozgatható változatban.

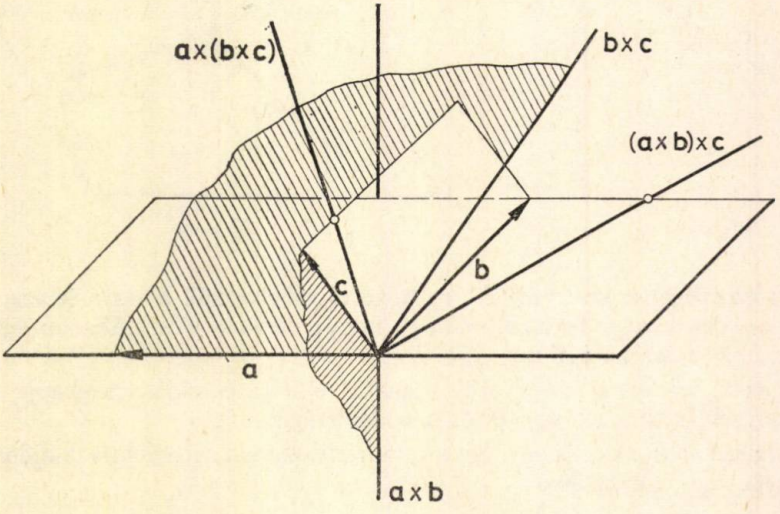



*17. ábra*

**7. eszköz.** *Térbeli szemléltető ábra a kifejtési tételhez.*

A tankönyvek utalnak a három vektor segítségével értelmezhető további műveletekre. Pl. a Munkatankönyv III. fakultatív A a 62. oldalon felhívja a tanulók figyelmét arra, hogy az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ vektor nem azonos az $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ vektorral, viszont a felvetett probléma megoldására nem utal. Éppen ezért tartottuk célszerűnek a 7. eszköz megszerkesztését *(18. ábra)*.

Az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, illetve az $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ vektorok szerkesztéséhez felhasználtuk az ún.



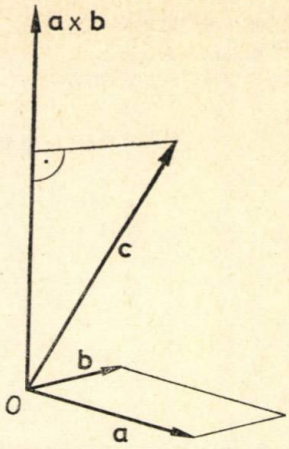

*18. ábra*

kifejtési tételt, amely szerint:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a},$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c},$$

vagyis azt, hogy az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ vektor az **a** és **b** vektorok, az $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ vektor pedig a **b** és **c** vektorok síkjában van benne.

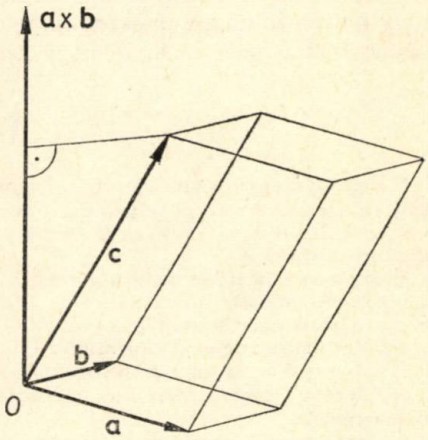


*19. ábra*

**8. eszköz.** *Eszközsorozat három vektor vegyes szorzatának a definíciójához és geometriai jelentésének megállapításához.*

A tankönyvekben felmerül az a kérdés is, hogy mit jelent az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, az ún. vegyes szorzat. (Matematika III. fakultatív A 421. oldal 103. feladat). E kérdés tisztázására, azaz a vegyes szorzat geometriai jelentésének, illetve tulajdonságainak bemutatására alkalmas ez az eszközsorozat, amely a 4. eszköz továbbépítésével keletkezett *(19. ábra)*.

Az *O* pontban hegesztéssel csatlakozik egymáshoz az **a**, **b** és **c** vektor. A **c** vektornak az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ irányára való merőleges vetületét egy vékonyabb vetítősugárral jelöltük ki. Az *O* pontban meghagytuk a csavarmenetes csatlakozást a balsodrású rendszer előállítási lehetőségének biztosítására. A vegyes szorzat szemléletes geometriai jelentésének megmutatásához megszerkesztettük azt a paralelepipedont is, amelynek térfogata megegyezik a vegyes szorzat abszolútértékével *(20. ábra)*. A *19. ábrán* látható eszköznek pedagógiai szempontból van jelentősége. Nem a kész ábrát — azaz a paralelepipedont — adjuk meg először, hanem a tanuló fantáziájára bízzuk a vegyes szorzat geometriai jelentésének a megkeresését. A másik eszköz *(20. ábra)* feladata a kialakult fogalom megerősítése, vizuális rögzítése. A 8. eszköz lehetővé teszi a felcserélési tétel felfedeztetését és bizonyítását is, vagyis annak a belátását, hogy



*20. ábra*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{abc}.$$

A bemutatott eszközök demonstrációs célra készültek, a szaktanteremben a tanár is, a diák is használhatja őket. Térbeliségük, a mozgathatóság, a látás sok könnyítést jelent a tanulók számára. A tanítási órán való jelenlétük fokozza a tanulók természetes kíváncsiságát, aktivitást és érdeklődést kelt fel bennük. Tapasztalatom szerint gondolkodásra, ismeretszerzésre ösztönző hatásuk van, és segítségükkel önállóan fedezhetnek fel a tanulók új fogalmakat, új tulajdonságokat. Különösen érvényes ez a megállapítás a munkatankönyv segítségével tanuló tanulók esetében.

A térbeli ábrák és eszközök alkalmazása során figyeltem fel arra a tényre is, hogy a tanulók egy része modellezésbe kezdett és kirakta saját maga számára térben a feladatokat. Ezt viszont egyértelműen pozitív hozzáállásként könyvelhetjük el és a tanulónak az önálló ismeretszerzési folyamatba való bekapcsolódásaként értékelhetjük.

RÓKA SÁNDOR
főiskolai tanársegéd
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

# Konstruktív feladatok szakkörre

Mottó: „A matematikának két arca van: a matematika egyfelől Eukleidész szigorú tudománya, de valami más is. Az euklidészi módon tárgyalt matematika rendszeres, deduktív tudománynak tűnik: ezzel szemben a matematika — miközben dolgozik vele az ember — kísérleti, induktív jellegű."

*Pólya György*

A feladatok rejtvényszerűek, a megoldás keresése, a kísérletezés lehetősége általában azon diákok érdeklődését is felkelti, akik különben nem tartoznak a matematika kedvelői közé. A konstrukciók megtalálása jelzi a gondolkodás fürgeségét, és azt, hogy milyen könnyen tájékozódik a matematika fogalmainak világában. Némelyik feladat nehéz, nem várható, hogy néhány perc alatt megoldják.

## Feladatok

**1.** Helyezd el egy kör kerületén az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat olyan sorrendben, hogy bármely két szomszédos szám különbsége 2-től ne legyen nagyobb!

**2.** Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek valamilyen sorrendjével írd fel a legnagyobb 36-tal osztható kilencjegyű számot!

**3.** Adj meg 5, nem feltétlenül különböző

*a)* egész számot,

*b)* pozitív egész számot,

amelyek összege egyenlő szorzatukkal!

**4.** Adj meg 5 egész számot, melyek szorzata negatív, összege nulla!

**5.** Adj meg 4 természetes számot úgy, hogy az azokból képzett különbségek az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok legyenek!

**6.** Keress minél hosszabb prímszámokból álló számtani sorozatot!

**7.** Adj meg olyan 1-től nagyobb egészet, amely nem osztható a 2, 3, 5, 7, 11, ..., $p$ prímszámok egyikével sem!

**8.** Adj meg olyan természetes számokból álló végtelen számtani sorozatot, amely nem tartalmaz négyzetszámot!

**9.** Adj meg olyan természetes számokból álló végtelen számtani sorozatot, amelynek egyik eleme sem áll elő két prím összegeként!

**10.** Az 1, 2, 3, ..., 100 számokból válassz ki 50 számot úgy, hogy azok közül bármely kettő relatív prím legyen!

**11.** A 10, 11, 12, ..., 50 számokat oszd két olyan részre, hogy egyikben se lehessen megoldani az $x+y=z$ egyenletet!

**12.** Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokkal tölts ki egy $3\times3$-as táblázatot úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban ugyanannyi legyen a számok összege!

**13.** Írj fel olyan egész együtthatós másodfokú egyenletet,

*a)* amelynek gyökei 2 és 3;

*b)* amelynek egyik gyöke $1+\sqrt{2}$!

**14.** Adj meg tíz olyan $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ számot, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek: $x_1$ a [0; 1] intervallumba esik; $x_1$ és $x_2$ közül egyik a [0; 1] intervallum egyik felébe, másik a másik felébe esik; $x_1, x_2, x_3$ közül egyik a [0; 1] intervallum egyik harmadába, másik egy másik harmadába, harmadik a harmadik harmadába esik; és így tovább hasonlóan.

**15.** Határozd meg azt az $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{10}}$ tízjegyű számot, amelyben $a_1$ a számban levő 0-k száma, $a_2$ a számban levő 1-esek száma, $a_3$ a 2-esek száma, ..., $a_{10}$ a 9-esek száma!

**16.** Írj a pontok helyébe tízes számrendszerbeli pozitív egész számokat úgy, hogy a keretben igaz állítás legyen!

> Ebben a keretben a 0 számjegyből pontosan ... darab van, az 1-ből ... darab, a 2-ből ... darab, a 3-ból ... darab, a 4-ből ... darab, az 5-ből ... darab, a 6-ból ... darab, a 7-ből ... darab, a 8-ból ... darab, végül a 9-ből ... darab.

**17.** Add meg az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból álló halmaznak hat olyan részhalmazát, hogy közülük bármely kettő közös része 1-elemű legyen!

**18.** Adj meg 3 olyan egész számokból álló végtelen halmazt, hogy bármely kettőnek végtelen sok közös eleme legyen, de a három halmaznak ne legyen közös eleme!

**19.** Helyezz el a sakktáblán 8 királynőt úgy, hogy ne üssék egymást!

**20.** Helyezz el a sakktáblán 5 királynőt úgy, hogy minden mezőt ütés alatt tartsanak!

**21.** Van 100 asztaliteniszező versenyzőnk. Egy játékos a tőle jobbtól mindig kikap. Szervezd meg, hogy 148 mérkőzés után megtaláljuk a legjobb és a legrosszabb képességű játékost!

**22.** Írd fel 4 darab 2-es segítségével, műveleti jelek használata nélkül a legnagyobb számot!

**23.** Adj meg olyan konvex testet, melyben a lapok, élek és csúcsok száma rendre 6, 10, 6!

**24.** Adj meg olyan háromszöget, amelynek minden magassága kisebb 1 cm-nél, de a területe nagyobb, mint 1000 $cm^2$!

**25.** Adj meg olyan tetraédert, melynek minden magassága a tetraéderen kívül halad!

**26.** Helyezz el a síkon 12 pontot 6 sorba úgy, hogy minden sorban 4 pont legyen!

**27.** Helyezz el a síkon 3 téglalapot úgy, hogy azok a síkot minél több részre osszák, s a téglalapok oldalai egymással párhuzamosak!

**28.** Adj meg 6 pontot a síkon úgy, hogy közülük bármely 3 egy egyenlő szárú háromszögnek a csúcsa legyen!

**29.** Adj meg 7 pontot a síkon úgy, hogy közülük bármely 3 közt legyen 2, amelyek távolsága 1 egység!

**30.** Adj meg 6 pontot a síkon úgy, hogy közüle bármelyik 3 másiktól 1 egység távolságra legyen!

**31.** Lehet-e a kockát úgy metszeni síkkal, hogy a síkmetszet szabályos hatszög legyen?

**32.** Egy kockát darabolj fel három egybevágó gúlára!

**33.** Vágj ki egy kockából szabályos tetraédert!

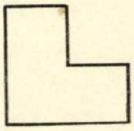
**34.** Adj meg szabályos tetraédert csúcspontjainak koordinátáival, ahol a koordináták egész számok!

**35.** Adj meg szabályos oktaédert csúcspontjainak koordinátáival, ahol a koordináták egész számok!

**36.** Adj meg két egymásba írt tetraédert! (Egy tetraéder egy másikba van írva, ha csúcsai illeszkednek a másik lapsíkjaira.)

**37.** Adj meg olyan $n$ oldalú konvex sokszöget, amelynek bármely három csúcsa egy tompaszögű háromszög csúcsait alkotja!

**38.** Az ábrán levő alakzatot darabold fel négy egybevágó részre!



**39.** Egy négyzetet darabolj fel 6, 7, illetve 8 darab négyzetre!

**40.** Egy tetszőleges háromszöget darabolj fel 4 egyenlő szárú háromszögre!

**41.** Tetszőleges háromszöget darabolj fel 6, illetve 7 hozzá hasonló háromszögre!

**42.** Adj meg olyan, a körtől különböző konvex alakzatot, amelynek bármely síkbeli egyenesre vett merőleges vetülete 1 egység!

**43.** Egy kört fedj le 7 minimális, egyenlő sugarú körrel!

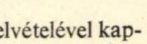
**44.** Egy téglalapot darabolj fel 5, 6, 7, illetve 8 téglalapra úgy, hogy ezek közül semelyik két szomszédos téglalap ne alkosson együtt téglalapot!

**45.** Pontszerű fényforrást takarj el 4 gömbbel!

**46.** Az ábrán látható 9 pontot kösd össze 4 szakaszból álló töröttvonallal!

**47.** Felvettünk 7 különböző pontot a síkon. Az ezek által felfeszített különböző egyenesek száma 9. Rajzold fel, hogyan helyezkedhetnek el ezek a pontok!

**48.** Egy szigeten felszállásra készen áll néhány repülőgép. Mindegyik tartályában annyi üzemanyag van, amennyi egy világkörüli út felére elegendő. Repülés közben az egyik repülőgép tartályából az üzemanyagot a másik gép tartályába át lehet szivattyúzni. A speciális üzemanyag egyetlen ellátótelepe a szigeten van. Az üzemanyag felvételével kapcsolatban feltételezzük, hogy a gépek sem a földön, sem a levegőben nem vesztenek időt. Hány egyforma repülőgépre van a szigeten szükség ahhoz, hogy biztosítsák egy gép világkörüli útját leszállás nélkül? Valamennyi gép sebessége egyforma, üzemanyagfelhasználása azonos, mindnek vissza kell térni a szigetre.



**49.** 52 hölgy mindegyike tud egy pletykát, ezeket telefonbeszélgetésekben adják tovább. Egy beszélgetésben a két fél elmondja a másiknak az általa addig megtudott összes pletykát. Szervezd meg a telefonbeszélgetéseket úgy, hogy 100 hívás után mindenki ismerje az összes pletykát!

**50.** 50 zsivány egymásra lövöldöz. A következők a játékszabályok:
— Mindenki egy lövést ad le, s ez a lövés halálos.
— Mindenki a hozzá legközelebbit lövi le, ha több ilyen van, akkor valamelyiket közülük.
— Mindenki ugyanabban a pillanatban adja le lövését.
Optimális esetben mennyi a halottak minimális száma?

## Útmutatások a feladatok megoldásához

**1.** 1-gyel kezdődően jobbra, balra, jobbra, balra, ... helyezzük el a számokat.
**2.** 987 654 312.
**3.** *a)* Pl.: 1, −1, 1, −1, 0.
*b)* Pl.: 1, 1, 2, 2, 2, vagy 1, 1, 1, 3, 3 vagy 1, 1, 1, 2, 5.
**4.** Pl.: −1, −1, −1, 1, 2.
**5.** 0, 1, 4, 6.
**6.** Pl.: 7, 37, 67, 97, 127, 157.
**7.** A számok szorzatához adjunk 1-et.
**8.** Például a $4 \cdot k+2$, vagy a $3 \cdot k+2$ alakú számok.
**9.** 11, 17, 23, 29, 35, ...
**10.** 51, 52, 53, ..., 100.
**11.** Az egyik csoport a 21, 22, 23, ..., 42 számokból áll.

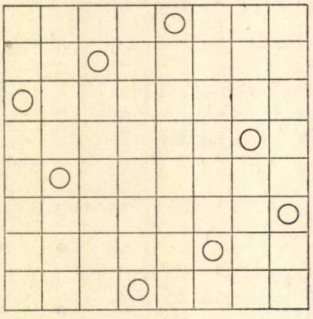
**12.**

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

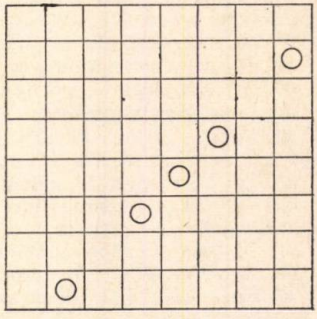
**13.** $x^2-5x+6=0$ és $x^2-2x-1=0$.
**14.** $x_1=0{,}95$, $x_2=0{,}05$, $x_3=0{,}34$, $x_4=0{,}74$, $x_5=0{,}58$, $x_6=0{,}17$, $x_7=0{,}45$, $x_8=0{,}87$, $x_9=0{,}26$, $x_{10}=0{,}66$
**15.** 6 210 001 000.
**16.** 1, 7, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1 vagy 1, 11, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

**17.** {1, 2} {1, 3} {1, 4} {1, 5} {1, 6} {2, 3, 4, 5, 6} vagy
{1, 2} {1, 3} {1, 4} {1, 5} {1, 6} {1}
**18.** Egyik halmazban legyenek azok a számok, melyek 3-mal osztva 0 vagy 1, másikban azok, melyek 1 vagy 2, harmadikban azok, amelyek 0 vagy 2 maradékot adnak.

**19.**

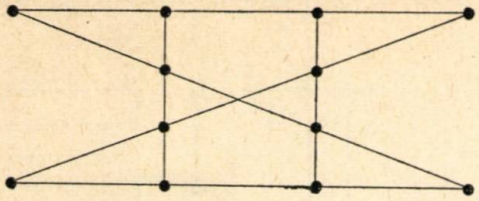


**20.**

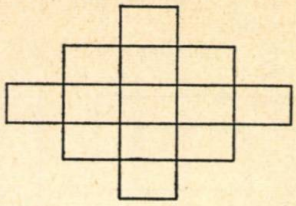


**21.** A 100 játékost párokba állítva 50 mérkőzésből az 50 győztes, illetve az 50 vesztes közül 49-49 mérkőzés után megtaláljuk a legjobb és a leggyengébb játékost. (Például az 50 győztes játékosból a legjobbat a kihívásos verseny szabályai szerint: egy mérkőzésből mindig a jobb jut tovább, azt kihívja a következő játékra egy másik játékos.)
**22.** $2^{(2^{22})}$.
**23.** Ötszög alapú gúla.
**24.** Vegyünk egy téglalapot, melynek oldalai 1 és 5000 cm. Az átlók négy háromszögre bontják a téglalapot, s ezek közt találunk megfelelőt.
**25.** A Matematika Tanítása 1986. februári számában az 1097. feladat megoldásánál találhatók ilyen konstrukciók.

**26.**

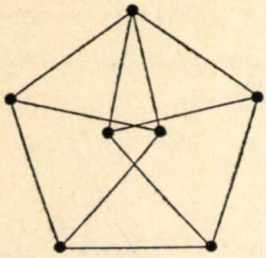


**27.**

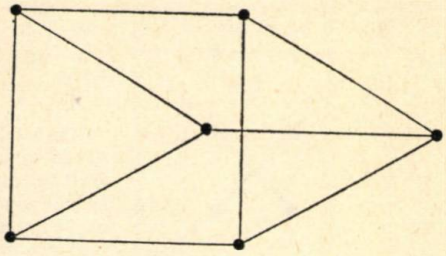


**28.** Szabályos ötszög csúcsai és a köré írt kör középpontja.

**29.**



**30.**



**31.** Állítsunk valamelyik testátló felezőpontjában a testátlóra merőleges síkot.

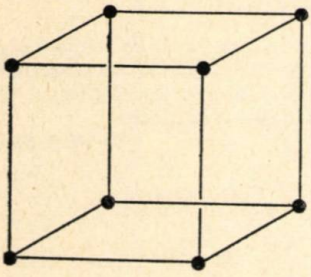
**32.** A keresett gúlákat a kocka alkalmasan választott oldallapja és egy csúcsa határozza meg.

**33.** Válasszuk ki a kocka 4 csúcsát úgy, hogy bármely kettő távolsága lapátlónyi legyen.

**34.** Használjuk az előző feladatot.

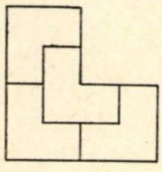
**35.** Egy kocka lapközéppontjai szabályos oktaédert határoznak meg.

**36.**

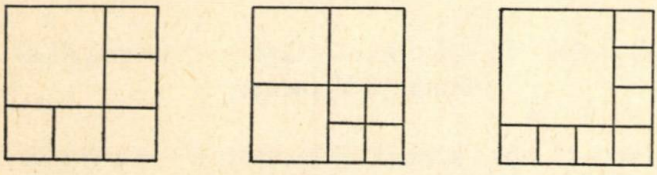


**37.** Vegyünk egy félkörívtől kisebb ívre illeszkedő $n$ oldalú konvex sokszöget.

**38.**

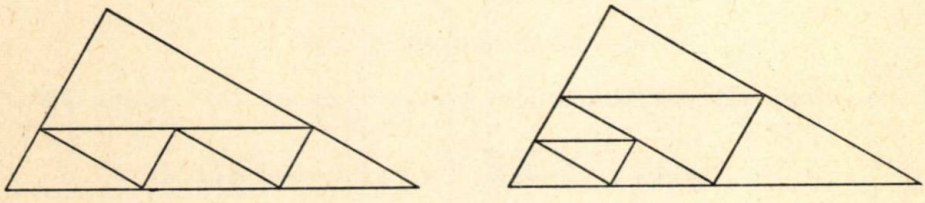


**39.**



**40.** Az átfogóhoz tartozó súlyvonal a derékszögű háromszöget két egyenlő szárú háromszögre bontja, és mivel bármely háromszöget két derékszögű háromszögre lehet bontani, azért felbontható 4 egyenlő szárú háromszögre is.

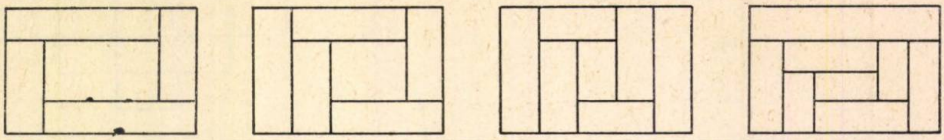
**41.**



42. Vegyünk egy szabályos háromszöget, s mindegyik csúcsból a szemközti oldal köré rajzoljunk egy körívet.

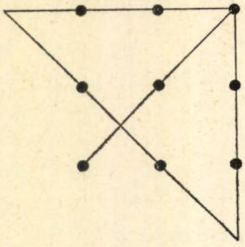
43. Ábra a borítón!

44.



45. Vegyünk egy pontot, s körülötte egy tetraédert, s a tetraéder oldallapjai köré írt köröket. A pont s egy-egy kör meghatároz egy kúppalástot. Ezekbe a kúpokba „ejtsünk bele" egy-egy gömböt, úgy választva sugarukat, hogy egymást ne érintsék.

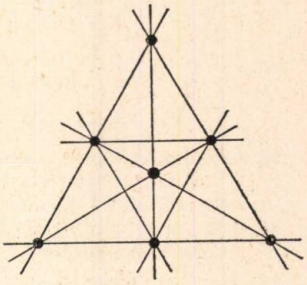
46.

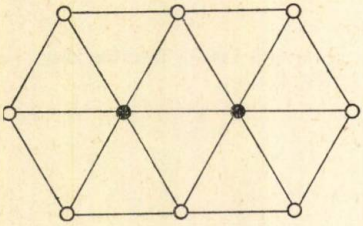


4×4-est 6, 7×7-est 12 szakaszból álló töröttvonallal össze lehet kötni.

47.

48. A világkörüli útra készülő gépen kívül elég 2 másik gép. Ezek egymást követően úgy fordulnak vissza, hogy üres tartállyal érkezzenek a szigetre, majd tankolás után az érkező gép elé mennek, hogy hazasegítsék.





49. Válasszunk ki 4 hölgyet, ezek 48 telefonhívás után megtudják a többi pletykát, s egymás közt 4 beszélgetés után átadják. Ekkor ez a 4 hölgy minden pletykát ismer, 48 hívás után pedig a többiek is megismerik ezeket.

50. 10-ből 2, 50-ből 10.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető főiskolai tanár
Könnyűipari Műszaki Főiskola, Budapest

## A műszaki főiskolák 1987. évi Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenye

Az 1987/88. tanévi Hajós György Matematikai Tanulmányi Versenyt a Széchenyi István Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola rendezte meg Győrött 1988. április 8-án és 9-én.

Az idei, sorrendben tizennegyedik versenyen 15 csapat 60 tagja vett részt.

*A versenyen kitűzött feladatok*

1. Határozzuk meg az alábbi függvény legnagyobb és legkisebb értékét a $2 \leqq x \leqq 17$ intervallumon:

$$x \mapsto \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\,!$$

2. Egy háromszög $\alpha, \beta, \gamma$ szögei olyanok, hogy

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

egymást követő természetes számok. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?

3. Egy 20×25-ös téglalapon találomra elhelyezünk 120 db egységnégyzetet. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapon még el tudunk helyezni egy egységátmérőjű kört úgy, hogy egyik egységnégyzettel se legyen közös belső pontja!

4. Egy lottószelvényt a következő módon akarunk kitölteni: a két legkisebb számot megválasztjuk, a harmadik az első két szám összege, a negyedik az első három szám összege, az ötödik pedig az első négy szám összege lesz.
   *a)* Mennyi lehet a legkisebb szám?
   *b)* Ha a legkisebb számot a lehető legnagyobbra választjuk, akkor mely számokat játsszuk meg?
   *c)* Hány lottószelvényt tölthetünk ki a fenti módon, különbözően?

5. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$2^x + 2^y - 3^z = 1$$

egyenletet!

*A csapatverseny első három helyezettje*

1. **Széchenyi István Közlekedési és Távközlési Műszaki Főiskola,** Győr;
2. **Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola,** Székesfehérvár;
3. **Gépipari és Automatizálási Műszaki Főiskola,** Kecskemét.

*Az egyéni verseny első három helyezettje*

1. **Horváth Sándor** (Gépipari és Automatizálási Műszaki Főiskola, Kecskemét);
2. **Kiss Krisztina** (Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola, Székesfehérvár);
3. **Halmy Attila** (Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola, Budapest).

BENCZE MIHÁLY
tanár,
Brassó

## Két módszer páratlan rendű bűvös négyzetek szerkesztésére

1. §

Értelmezzük az $A=[a_{ij}]$ $i,j=1, 2, \ldots, n$ mátrixot, amelynek elemei $a_{ij} \in \{1, 2, \ldots, n^2\}$, ahol $n$ páratlan természetes szám.

Legyen 1 az $i$ és $j$ változók kezdeti értéke, amelynek növelésével megszámoljuk az $i$-edik sort és $j$-edik oszlopot, ahol az algoritmus bizonyos idejében vagyunk. Így $a_{ij}=a_{11}=\frac{1}{2}n(n+1)$ az $A$ mátrix első eleme, hisz a páratlan rendű bűvös négyzet központi eleme $\frac{1}{2}(n^2+1)$. A következő $a_{ij}$ elemet megkapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a $j=\frac{1}{2}(n+1)$-ik oszlopig egy $n+2$ állandó különbségű számtani haladványunk van. Rögtön az első sor és a $j=\frac{1}{2}(n+1)$-ik oszlop rákövetkező eleme

$a_{1,(n+3)/2}=n^2+1$. Most ismétlődik az $n+2$ állandó különbségű számtani haladvány addig, amíg a mátrix első sora betelik, azaz $j=n$-ig. Mivel $i\neq n$, áttérünk a következő sorra, amit $i=i+1$ helyettesítéssel kapunk meg. Bármelyik rákövetkező sor első elemét megkapjuk, ha az előző sor utolsó elemét egy egységgel csökkentjük, azaz $a_{ij}=a_{i-1,j}-1$, $j=n$. Hogy az eljárást tudjuk folytatni, meg kell vizsgáljuk, hogy az a sor, amelyikben vagyunk, páros vagy páratlan indexű. Ezért el kell dönteni, hogy $[i/2]=i/2$?, ahol [ ] az egész részt jelenti. Ezért szükséges a $k_1$ és $k_2$ változók bevezetése úgy, hogy $k_1$ értékei 1-től $\frac{1}{2}(n+1)$-ig és $k_2$ értékei $\frac{1}{2}(n+3)$-tól $n$-ig terjedjenek, megszámolva így $k$ esetén a mátrix oszlopait a sor közepéig $\left(j=\frac{1}{2}(n+1)\right)$ és innen a mátrix széléig $(j=n)$ a $k_2$ változó esetén. Legyen így a kezdeti értékük $k_1=1$ és $k_2=\frac{1}{2}(n+3)$. Ha az a sor, amelyikben vagyunk, páros, azaz $[i/2]=i/2$, akkor a $k_2$ változó értéke marad, míg a $k_1$ változó értéke egy egységgel nő, azaz $k_1=k_1+1$. Ha az a sor, amelyikben vagyunk, páratlan, azaz $[i/2]\neq i/2$, akkor a $k_1$ változó értéke marad, míg a $k_2$ változó értéke egy egységgel nő, azaz $k_2=k_2+1$. A következőkben két esetet különböztetünk meg.

Első eset amikor $i$ páros. Ezért $k_1$ értéke $k_1+1$ lesz, és $j=1$, valamint az első elem $a_{i1}=a_{i-1,j}-1$. Ha az oszlop értéke $k_1$ $(j=k_1)$ akkor a rákövetkező elemet az $a_{i,k_1+1}=a_{i,k_1}-2$ képlet adja meg, azaz az előzőből kivonunk két egységet.

Második eset amikor $i$ páratlan. Akkor $k_2$ értéke $k_2+1$ és $j=k_2$-re a következő elem $a_{i,k_2}=a_{i,k_2-1}-2$, mert a $j\in\left(\frac{1}{2}(n+3), n\right)$ oszlopon helyezkedik el. A többi esetben, amikor $j\neq k_1$, $j\neq k_2$ és $j\neq n$, akkor a mátrix elemeit megkapjuk, hogy ha az előző elemből kivonunk $(n+2)$-t. Ha $j\neq k_1$ és $j\neq k_2$, valamint $j=n$, akkor eljárásunk véget ér. Ha $j\neq n$, akkor áttérünk a következő elemre a $j=j+1$ és $a_{ij}=a_{i,j-1}-(n+2)$ képlettel. $k_1$ és $k_2$ megadja azokat az elemeket, amelyeket úgy kapunk, hogy az előzőből kivonunk 2-t; és ezek változása a sor indexének paritásától függ. Ha $j=n$ és $i\neq n$, akkor áttérünk a következő sorra, azaz $i=i+1$. És végül, ha $j=n$ és $i=n$, akkor az eljárás véget ér és megkapjuk a bűvös négyzetet. A módszer előnye az, hogy a számítógépbe csak az $n$ értékét kell betáplálni. Mellékelten látható az $n=5$-re szerkesztett bűvös négyzet.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 8 | 1 | 24 | 17 |
| 16 | 14 | 7 | 5 | 23 |
| 22 | 20 | 13 | 6 | 4 |
| 3 | 21 | 19 | 12 | 10 |
| 9 | 2 | 25 | 18 | 11 |

## 2. §

Ezt a módszert lépésekben adjuk meg.

**I.** Értelmezzük a következő táblázatot:

| | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 2 | ... | $n$ |
| $x_2$ | $n+1$ | $n+2$ | ... | $2n$ |
| -------- | -------- | -------- | -------- | -------- |
| $x_n$ | $n^2-n+1$ | $n^2-n+2$ | ... | $n^2$ |

ahol $n$ páratlan természetes szám.

**II.** Az előző táblázatot átírjuk a következő alakra:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_1y_1$ | $x_1y_2$ | ... | $x_1y_n$ |
| $x_2y_1$ | $x_2y_2$ | ... | $x_2y_n$ |
| ------- | ------- | ------ | ------ |
| $x_ny_1$ | $x_ny_2$ | ... | $x_ny_n$ |

**III.** A középső oszlop elemei fentről le a következők:
$x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n$.

**IV.** A mellékátló elemei lentről fel a következők:
$x_ky_1, x_ky_2, \ldots, x_ky_n$, ahol $k=[n/2]+1$.

**V.** Az első oszlop elemei fentről le a következők:
$x_{k+1}y_2, x_{k+2}y_3, \ldots, x_ky_1$.

**VI.** Most a sorokat úgy töltjük ki, hogy kiindulunk az első oszlop eleméből, és soronként az egymás utáni elempárok $x$-einek indexe olyan számtani sorozatban van, amelynek állandó különbsége 1, és $y$-ainak indexe olyan számtani sorozatban van, amelynek állandó különbsége 2. Például $x_iy_j, x_{i+1}y_{j+2}, x_{i+2}y_{j+4}, \ldots$

**VII.** Most azonosítjuk az így kapott táblázatban az $x_iy_j$ elempárokat az **I.** táblázat elemei szerint. Pl. $x_1y_1=1$, $x_1y_2=2, \ldots, x_ny_n=n^2$ stb. Beírva az így kapott számértékeket, megkapjuk a bűvös négyzetet.

Bemutatjuk az eljárást $n=5$-re.

| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $x_2$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $x_3$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $x_4$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $x_5$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

(I.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1y_1$ | $x_1y_2$ | $x_1y_3$ | $x_1y_4$ | $x_1y_5$ |
| $x_2y_1$ | $x_2y_2$ | $x_2y_3$ | $x_2y_4$ | $x_2y_5$ |
| $x_3y_1$ | $x_3y_2$ | $x_3y_3$ | $x_3y_4$ | $x_3y_5$ |
| $x_4y_1$ | $x_4y_2$ | $x_4y_3$ | $x_4y_4$ | $x_4y_5$ |
| $x_5y_1$ | $x_5y_2$ | $x_5y_3$ | $x_5y_4$ | $x_5y_5$ |

(II.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_4y_2$ | | $x_1y_1$ | | $x_3y_5$ |
| $x_5y_3$ | | $x_2y_2$ | $x_3y_4$ | |
| $x_1y_4$ | | $x_3y_3$ | | |
| $x_2y_5$ | $x_3y_2$ | $x_4y_4$ | | |
| $x_3y_1$ | | $x_5y_5$ | | |

(III., IV., V.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_4y_2$ | $x_5y_4$ | $x_1y_1$ | $x_2y_3$ | $x_3y_5$ |
| $x_5y_3$ | $x_1y_5$ | $x_2y_2$ | $x_3y_4$ | $x_4y_1$ |
| $x_1y_4$ | $x_2y_1$ | $x_3y_3$ | $x_4y_5$ | $x_5y_2$ |
| $x_2y_5$ | $x_3y_2$ | $x_4y_4$ | $x_5y_1$ | $x_1y_3$ |
| $x_3y_1$ | $x_4y_3$ | $x_5y_5$ | $x_1y_2$ | $x_2y_4$ |

(VI.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

(VII.)

IRODALOM

BERGER GYÖRGY: *Bűvös négyzetek; Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1986.*

## Az 1988. évi májusi iskolai matematika írásbeli érettségi tételek

Az iskolai érettségi írásbeli tételek az „Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából" (Tankönyvkiadó, Bp. 1984, R. sz.: 81 307) című könyvből kerülnek kitűzésre. Az egyes feladatok sorszámai ennek a kiadványnak a megfelelő sorszámú feladatát jelentik.

A (nappali) gimnáziumok feladatai:

1. **1266.**, 4. **2703.**,
2. **3499.**, 5. **2927.**,
3. **3354.**, 6. **975.**,
7. **41.**

A (nappali) szakközépiskolák feladatai:

1. **1319.**, 4. **2270.**,
2. **3387.**, 5. **53.**,
3. **1394.**, 6. **1744.**,
7. **22.**

BALKU JENŐ
megyei szaktanácsadó
Nyíregyháza

DR. HARTOSNÉ DR. MAGYAR JUDIT
főiskolai adjunktus
Nyíregyháza

## Ambrózy Géza megyei középiskolai matematikai tehetségkutató verseny

1987 őszén Szabolcs-Szatmár megyében a Megyei Pedagógiai Intézet és a Bolyai János Matematikai Társulat megyei tagozata meghirdette az „Ambrózy Géza középiskolai matematikai tehetségkutató versenyt".

A verseny célja: a matematika iránt érdeklődő és tehetséges tanulók felkutatása megyénkben. Távolabbi célként jelöltük meg ezen tanulók bevonását a megyében működő tehetséggondozó szakkörök munkájába.

Néhány szó a verseny névadójáról.

*Ambrózy Géza* 1896. december 16-án Nagyszalókon (Szepes megye) született. Édesapja tanító volt. Gimnáziumi tanul-

mányait Késmárkon végezte. 1923-ban Budapesten a Pázmány Péter Tudományegyetemen matematika—fizika szakos tanári oklevelet szerzett. Egyetemi évei alatt tudományos dolgozataival, előadásaival professzorai és diáktársai elismerését is elnyerte. Nagy hatást gyakorolt rá matematika-professzora, Kürschák József és vezetőtanára, Szíjártó Miklós.

A diploma megszerzése után Nyíregyházán a Geduly Henrik Evangélikus Leánygimnáziumban kezdte meg tanári munkáját. Kiválóan képzett középiskolai tanár volt. Pedagógiai elveivel, eljárásaival megelőzte korát. Tanítványai részt vettek a KÖMAL feladatmegoldásain.

Szaklapokban tűzött ki matematikai feladatokat. Szívesen tartott előadásokat. Iskolájában Matematikai és Természettudományi Kört vezetett. Tagja volt az Országos Meteorológiai Társulatnak, a Matematikai és Fizikai Társulatnak.

Az I. világháborúban szeme megsérült. Látása az évek során fokozatosan romlott. 1946 szeptemberében saját kérelmére betegsége miatt nyugdíjazták.

Nyugdíjba vonulása után mind szakmai, mind közéleti tevékenységét folytatta. Középiskolai kollégiumokban korrepetált, egyetemi felvételi előkészítőket vállalt.

1952-ben a Bolyai János Matematikai Társulat nyíregyházi tagozatának egyik életre hívója, majd 1956—66-ig titkára volt. 1954-ben Beke Manó-díjban részesült.

A TIT tagjaként csillagászati és meteorológiai előadásokat tartott.

1950-ben tagja lett a Vakok és Csökkentlátók Országos Szövetségének. Megtanulta és szakmájában is hasznosította a Braille-írást. Sok száz csökkentlátó és vak fiatalnak adott lehetőséget a magasabb fokú matematikai ismeretek megszerzésére matematikai tankönyvek és a logaritmustáblázat Braille-írásra való átültetésével.

1955-ben a Vakok és Csökkentlátók Szövetségének nyíregyházi csoportja titkárává választotta.

Tevékeny életének az 1966-ban bekövetkezett halála vetett véget.

A megyei verseny felett a névadó három fia védnökséget vállalt.

Az Ambrózy Géza emlékére meghirdetett verseny két fordulóban zajlott le. Az első forduló — decemberben — tesztverseny volt. Ezt a középiskolák bonyolították le a versenybizottság által összeállított és sokszorosított tesztlapok segítségével. A megye 41 középfokú intézményéből 650-en jelentkeztek és indultak a versenyen. A középiskolák a kijavított dolgozatokat eljuttatták a Megyei Pedagógiai Intézetbe, ahol a szaktanácsadók rangsorolták.

A II. fordulóra — januárban — minden évfolyamból a legjobb 10, holtverseny esetén 11 tanulót hívtunk be. A versenyt Nyíregyházán a Bessenyei György Tanárképző Főiskolán rendeztük meg. A dolgozatokat a feladatsorokat összeállító főiskolai oktatók és a középiskolák felkért tanárai együtt javították és rangsorolták.

*A II. forduló feladatsorai osztályonként*

*1. osztály*

(Összeállította: *Kovács Zoltán* főiskolai tanársegéd)

1. Négy tanuló, *A*, *B*, *C*, *D* közös énekműsorral indultak a „Ki Mit Tud?" vetélkedőn. Minden dalt 3 tanuló énekelt. *A* összesen 8 dalt énekelt, négyőjük közül ő a legtöbbet. *D* összesen 5 dalt, ő a legkevesebbet. Összesen hány dal hangzott el az előadásukban?

(5 pont)

2. Bizonyítsuk be, hogy két pozitív és egymástól különböző négyzetszám összegének négyzete mindig felírható két pozitív egész szám négyzetösszegeként!

(5 pont)

3. Az $ABCD$ konvex négyszög $DC$ oldalának felezőpontja legyen $E$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABE$ háromszög területe a négyszög területének a fele, akkor a négyszög trapéz! Igaz-e a megfordítás?

(7 pont)

4. Határozzuk meg az

$$5^{x_1}+5^{x_2}+\ldots+5^{x_{12}} = 1988$$

egyenlet nemnegatív egész megoldásait, ha tudjuk, hogy

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{12}.$$

(7 pont)

5. Adott egy szabályos ötszög négy csúcsa. Szerkesszük meg az ötödik csúcsot, ha egyetlen párhuzamos élű vonalzót használhatunk. (A párhuzamos élű vonalzót ugyanúgy lehet használni, mint a közönséges egységbeosztás nélküli vonalzót, továbbá egy adott egyenessel párhuzamost lehet húzni vele a vonalzó élei távolságában.)

(8 pont)

*2. osztály*

(Összeállította: *Dr. Kiss Sándor* főiskolai adjunktus)

1. Az $ABC$ derékszögű háromszög átfogója $AB$, a $CAB\sphericalangle = 60°$. A $C$ csúcsból induló magasság talppontja $D$. Az $ADC$ háromszögben a $D$ csúcsból induló magasság talppontja $E$, a $CDB$-ben az egyik magasság $DF$. A $DFB$ háromszög $F$ csúcsból induló magassága $FH$. Igazoljuk, hogy

$$\overline{HB} = \overline{HA}+\overline{AE}.$$

(8 pont)

2. A $KLMN$ négyzet $KN$ oldalának $K$ csúcshoz közelebbi negyedelő pontja $S$, az $LM$ oldal $M$ csúcshoz közelebbi harmadolópontja $R$. Az $LS$ egyenes messe a $KM$ átlót $T$ pontban, az $NR$ pedig $P$ pontban. Határozzuk meg a $KST$ és $MPR$ háromszögek területének arányát!

(8 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy az egész számok halmazában nem oldható meg az $x^2+y^2=19\,871\,988$ egyenlet!

(15 pont)

4. Az $f(x)$ függvényről a következőket tudjuk:
   *a)* minden természetes számra értelmezve van,
   *b)* bármely $x$-re $f(x)$ is természetes szám,
   *c)* $f(1)=1$,
   *d)* bármely $n$ és $m$ természetes számra $f(n)+f(m)=f(n+m)-n\cdot m$ teljesül.
Határozzuk meg $f(1988)$ értékét és az $f(x)$ függvényt!

(15 pont)

5. Be lehet-e írni egy $n\times n$-es méretű táblázat mezőibe az 1, 2 és 3 számokat úgy, hogy a sorokban az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

(10 pont)

*3. osztály*

(Összeállította: *Róka Sándor* főiskolai tanársegéd)

1. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok körében!

$$(2x^2-x-3)^4+(2x^2-x-3)^2\cdot(2x^2+x-6)^4+(2x^2+x-6)^6 = 0.$$

(5 pont)

2. $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x+3+\frac{c}{x}$ és tudjuk, hogy $f(3)=-3$. Mivel egyenlő $f(-3)$?

(5 pont)

**3.** Határozd meg a következő trigonometrikus egyenlet összes különböző gyökét, melyre $0° \leqq x \leqq 360°$ teljesül:

$$(2 \cdot \sin x - 1) \cdot \left( \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

(5 pont)

**4.** Tudjuk, hogy $a+b+c=0$ és $a^2+b^2+c^2=1$. Mivel egyenlő $a^4+b^4+c^4$?

(5 pont)

**5.** A trapéz átlói a trapézt négy háromszögre bontják. Jelölje $t$, illetve $T$ annak a két háromszögnek a területét, amelyeknek egy-egy oldala a trapéz egyik-egyik párhuzamos oldala. Bizonyítsd be, hogy a trapéz területe $(\sqrt{t}+\sqrt{T})^2$!

(10 pont)

*4. osztály*

(Összeállította: *Róka Sándor* főiskolai tanársegéd)

**1.** Oldd meg az alábbi egyenletet:

$$2 \cdot \cos \frac{x}{10} = 2^x + 2^{-x}.$$

(5 pont)

**2.** Tudjuk, hogy $\log_x w = 24$, $\log_y w = 40$ és $\log_{xyz} w = 12$. Mivel egyenlő $\log_z w$?

(5 pont)

**3.** Mértani sorozat első $m$ elemének összegét jelölje $S_m$. Igazold a következő azonosságot:

$$S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

(8 pont)

**4.** Négy kecskét kikötöttünk egy-egy karóhoz. Közülük bármely három összeterelhető egy helyre. Ekkor igaz-e, hogy mind a négy is összeterelhető egy helyre?

(8 pont)

**5.** Adott a síkon egy $r$ és egy $R$ sugarú kör, melyek érintik egymást, és az $e$ egyenes közös külső érintőjük. Mekkora annak a körnek a sugara, mely érinti mindkét kört és az $e$ egyenest?

(10 pont)

Minden évfolyamból a három legmagasabb pontszámot elért tanulót könyvjutalomban részesítettük. A BJMT, a Megyei Pedagógiai Intézet és az Ambrózy-család ajándékát Ambrózy Pál, a Központi Meteorológiai Intézet vezetője adta át a versenyzőknek.

A verseny tapasztalatait felhasználva, a nagy érdeklődést figyelembe véve folytatni kívánjuk megyénkben a matematikai tehetségek felkutatását és a versenyt évenként megrendezzük.

INHALTSVERZEICHNIS


*C. Neményi Eszter:* Gedanken über die Entwicklung der mathematischen Erziehung im Kindergarten und in der Grundschule ..... 97

*Radnainé Szendrei Julianna:* Lehrpläne für Mathematik in der Fachmittelschule. Untersuchung der Gegenwart und der Zukunft ..... 101

*Tóth Imre:* Eine modernere Form der Kontrolle von schriftlichen Arbeiten ..... 106

*Dr. Kántor Sándorné:* Lehr- und Lernmittel zum Unterricht von dreidimensionalen Vektoren für die III. Klasse des Gymnasiums ..... 110

*Róka Sándor:* Zirkel der konstruktiven Aufgaben ..... 118

*Dr. Scharnitzky Viktor:* Hajós György — Landeswettbewerb in Mathematik für die Technischen Hochschulen im Jahre 1987 122

*Bencze Mihály:* Zwei Methoden zum Konstruieren von magischen Quadraten mit ungerader Ordnung ..... 123

Abituraufgaben in Mathematik für das Jahr 1988 ..... 126

*Balku, Jenő—Frau Dr. Judit Hartos* (geb.: *Magyar*): Ambrózy Géza mathematischer Komitats-Wettlewerb der Schüler der Mittelschulen zwecks Begabungsforschung ..... 126

NEUE BÜCHER ..... IV.

# Új könyvek

BOGNÁR KATALIN: *A viszontbiztosítás matematikai módszerei,* (Biztosítási matematika, 3), Budapest, 1987, Állami Biztosító, 60 oldal, ár nélkül.

BORSODI ISTVÁN—GÖNDÖCS LÁSZLÓ: *Matematika a tanítóképző intézet első évfolyama számára,* Ideiglenes tankönyv, (11. kiadás), Budapest, 1986, Tankönyvkiadó, 355 oldal, 33 Ft.

BRONSTEJN, J. N.—SZEMENGYAJEV, K. A.: *Matematikai zsebkönyv mérnökök és mérnök-hallgatók számára,* (6. átdolgozott kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 1190 oldal, 160 Ft.

COXETER, H. S. M.: *A geometriák alapjai,* (2. kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 470 oldal, 170 Ft.

GAÁL ISTVÁN: *Amit rosszul tudunk, Természettudományi koholmányok és balítéletek,* Budapest, 1987, Terra, 437 oldal, 169 Ft.

GORELIK, G. J.: *Miért háromdimenziós a tér?,* Budapest, 1987, Gondolat Könyvkiadó, 226 oldal, 30 Ft.

GREENSPAN, D.—RÓZSA, P. (editors): *Numerical methods,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 50, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathematical Society and Elsevier Science Publishers B. V., 688 oldal, 1000 Ft.

GYEMIDOVICS, B. P.: *Matematikai analízis, Feladatgyűjtemény,* (3. kiadás), Egyetemi segédkönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 595 oldal, 74 Ft.

HAJÓS GYÖRGY: *Bevezetés a geometriába,* (8. kiadás), Egyetemi tankönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 594 oldal, 63 Ft.

HAJÓS GYÖRGY—NEUKOMM GYULA—SURÁNYI JÁNOS: *Matematikai versenytételek I. rész,* (4. javított, bővített és átdolgozott kiadás), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 182 oldal, 40 Ft.

KERÉKGYÁRTÓ GYÖRGYNÉ—MUNDROCZÓ GYÖRGY: *Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben,* Budapest, 1987, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 332 oldal, 90 Ft.

KNUTH, D. E.: *Számok a valóson innen és túl,* Budapest, 1987, Gondolat Könyvkiadó, 135 oldal, 32 Ft.

KNUTH, D. E.: *A számítógép-programozás művészete 1., Alapvető algoritmusok,* Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 654 oldal, 180 Ft.

KNUTH, D. E.: *A számítógép-programozás művészete 2., Szeminumerikus algoritmusok,* Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 690 oldal, 180 Ft.

LIGETI BÉLA—MOSONI GYÖRGY: *Törd a fejed, érdemes!,* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára, (7. kiadás), Általános iskolai szakköri füzet, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 175 oldal, 20 Ft.

LUKÁCS OTTÓ: *Matematikai statisztika, Példatár,* Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 570 oldal, 74 Ft.

MICHALETZKY GYÖRGY: *A biztosítási kockázat mint sztochasztikus folyamat,* (Biztosítási matematika, 2.), Budapest, 1987, Állami Biztosító, 40 oldal, ár nélkül.

MOGYORÓDI JÓZSEF: *A biztosítási díjkalkuláció matematikai elveiről,* (Biztosítási matematika, 1.), Budapest, 1987, Állami Biztosító, 87 oldal, ár nélkül.

PÓLOS LÁSZLÓ—RUZSA IMRE: *A logika elemei,* Főiskolai tankönyv, Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 224 oldal, 28 Ft.

RADNAI GYULÁNÉ SZENDREI JULIANNA: *Matek-játék a napközíben és otthon,* Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 45 oldal+melléklet, 62 Ft.

SCHUSZTER GYULA: *Matematikai-didaktikai tanulmányok általános és középiskolai tanárok számára,* Kaposvár, 1987, Somogy Megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 78 oldal, ár nélkül.

SZENTHE, J.—TAMÁSSY, L. (editors): *Topics in differentialgeometry, I—II.,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 46, Budapest—Amsterdam—Oxford—New York, 1988, János Bolyai Mathematical Society and Elsevier Science Publishers B. V., 1377 oldal, 1800 Ft.

TELEGDI LÁSZLÓ: *Bináris változók struktúrájának vizsgálata,* Budapest, 1987, SZTAKI, 147 oldal, ár nélkül.

TÓTH IRÉN (szerk.): *Operációkutatás I.,* (Matematika üzemgazdászoknak), Budapest, 1987, Tankönyvkiadó, 195 oldal, 19 Ft.

URBÁN JÁNOS: *Matematikai logika, Példatár,* (2. kiadás), Budapest, 1987, Műszaki Könyvkiadó, 273 oldal, 54 Ft.

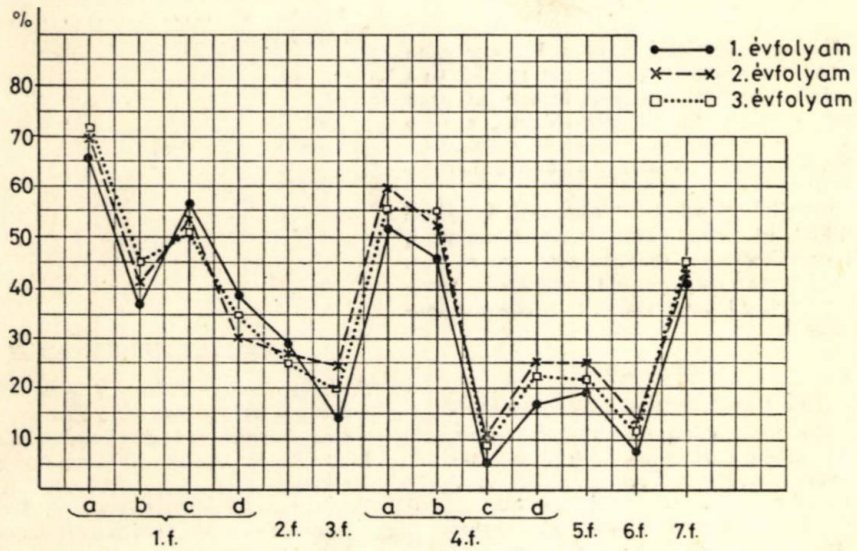
*Dr. Scharnitzky Viktor*

# A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

2. melléklet

Összesített teljesítmények




1988. XXXV. évfolyam

5 szám

# A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1971 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-3047 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

**ISSN 0461—3902**


Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
*a)* személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét—irányítószámmal.

## TARTALOM


*Figeczky Jenőné—Pálmay Lóránt:* Az alapvető matematikai ismeretek szintjének vizsgálata a szakmunkásképző iskolákban ..... 129
*Lénárt István:* Két geometriai feladatsor ... 140
*Tettamanti Edit—Dr. Gyaraki F. Frigyes:* Matematikai olimpia az iberoamerikai országokban ..... 145
*I. M. Jaglom:* Pólya György (születésének 100. évfordulójára) ..... 147
*Radnainé Szendrei Julianna:* Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek? 153
*Tatár István:* A Feladatok az úttörő-matematikusok vetélkedőin c. könyv megjelenéséhez ..... 154
FELADATOK ..... 156


## СОДЕРЖАНИЕ


*Фигецки Енёне—Палмаи Лорант:* Проверка уровня основных математических знаний по математике в ПТУ .... 129
*Ленарт Иштван:* Две серии математический задач ..... 140
*Теттаманти Эдит—Д-р Дьяраки Ф. Фридеш:* Математическая олимпиада в иберийско-американских странах... 145
*И. М. Яглом:* Творчество Пойа Дьёрдья (по случаю столетия со дня рождения) 147
*Раднаине Сендреи Юлианна:* Рецензия на книгу Раймонда Смаллиэна ..... 153
*Татар Иштван:* К появлении книги „Задачи на соревнованиях пионерских математиков" ..... 154
ЗАДАЧИ..... 156


## INHALTSVERZEICHNIS


*Figeczky Jenőné—Pálmay Lóránt:* Untersuchung des Niveaus der mathematischen Grundkenntnisse in den Berufsschulen .. 129
*Lénárt István:* Zwei geometrische Aufgabenreihen ..... 140
*Tettamanti Edit—Dr. Gyaraki F. Frigyes:* Mathematikolympiade in den iberoamerikanischen Landern ..... 145
*I. M. Jaglom:* Pólya György (zum 100. Geburtstag) ..... 147
*Radnainé Szendrei Julianna:* Raymond Smullyan: Was ist der Titel dieses Buches? ..... 153
*Tatár István:* Zum Erscheinen des Buches Aufgaben an den Wettstreiten der pionier Mathematiker ..... 154
AUFGABEN ..... 156

FIGECZKY JENŐNÉ — PÁLMAY LÓRÁNT
tanár — vezető szaktanácsadó
Budapest — Budapest

# Az alapvető matematikai ismeretek szintjének vizsgálata a szakmunkásképző iskolákban

## I.

A szakmai feladatok, problémák megoldásához minden szakmunkástanulónak rendelkeznie kell néhány alapvető matematikai ismerettel. Ezek — a legtöbb szakmában — a matematika szűk területére korlátozódnak: pozitív racionális számokkal végzett alapműveletek, mértékegységek átváltása, kerület- és területszámítás, egyszerű egyenletek, szerkesztési feladatok és a százalékszámítás.

A 80-as évek elejétől kezdve egyre több szakmunkásképző iskola matematika-munkaközössége jelezte, hogy az elsősök évről évre gyengébb tudással érkeznek. Lassan és sok hibával számolnak, nem ismerik az alapvető szerkesztési lépéseket, a leggyakrabban előforduló síkidomok kerület- és területképletét, a mértékegységek átváltásában is bizonytalanok.

A látogatások során hasonló hiányosságokat tapasztaltunk az alapkészségekben, holott ezek a szakmai elméletben és gyakorlatban, de a hétköznapi életben is nélkülözhetetlen ismeretek.

*Pótolhatók-e* ezek a három év folyamán?

*Van-e valamilyen fejlődés,* illetve az éppen tanult témáknál van-e *kiugró* eredmény?

Ezekre a kérdésekre — a beszélgetések, óralátogatások, dolgozatok elemzése mellett — az 1987—88-as *tanévben végzett felmérés* eredményeinek elemzésével keresünk választ.

A felmérésben a főváros *10* szakmunkásképző iskolájának egy-egy *elsős, másodikos és harmadikos* osztálya vett részt (285 elsős, 293 másodikos, 226 harmadikos; összesen 804 tanuló) *január—február* hónapban. Mindhárom évfolyamon *ugyanazt* a feladatsort — „A—B" csoportban — (ld. 1. melléklet) — tűztük ki a gyerekeknek. A feladatokat igyekeztünk úgy válogatni, hogy azok az általános iskola és a szakmunkásképző iskola minimumkövetelményeit, valamint a szakmai számításoknál leggyakrabban előforduló ismereteket tartalmazzák. Teljességre nem vállalkozhattunk, hiszen minden évfolyamon csak egy-egy *tanítási órát* kértünk az iskoláktól.

A tapasztalat szerint *a* rendelkezésre álló *45 perc elegendő volt.* Bizonyos feladatokkal nem azért nem foglalkoztak, mert kevés volt az idő, hanem mert nem tudtak velük mit kezdeni.

A feladatok megoldásához a tanulók semmiféle segédeszközt (függvénytáblázat, zsebszámológép) nem használhattak.

Az egyes feladatok teljesítményeit a mellékletek tartalmazzák.

1. melléklet

*Feladatlap* „A"

**1.** Végezd el a kijelölt műveleteket:

*a)* $126{,}3+2{,}56-0{,}658 =$

*b)* $0{,}15:30 =$

*c)* $98{,}05 \cdot 1{,}06$

*d)* $\frac{5}{6}:\frac{1}{2}-\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{3} =$

**2.** Egy téglalap egyik oldala 2,4 dm, a másik ennek $\frac{3}{4}$ része. Hány méter a téglalap kerülete?

3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$x \mapsto \frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \quad \text{és} \quad x \mapsto -2x-4.$$

Olvasd le a grafikonok metszéspontjának ($M$) koordinátáit!

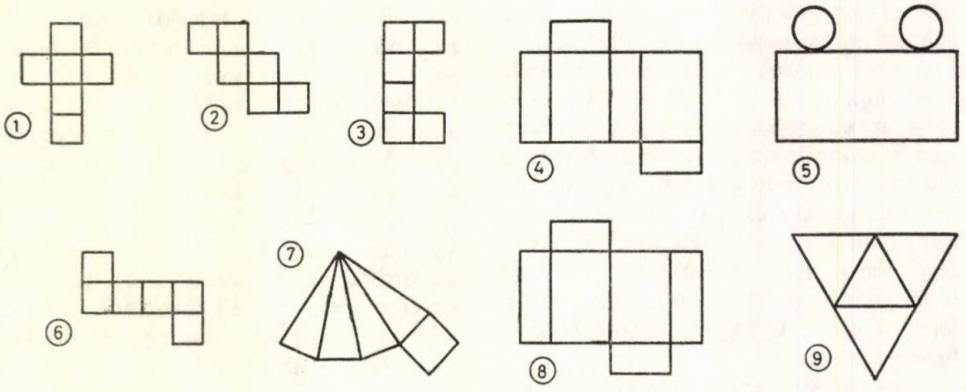
4. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

*a)* $3(x-6)=0$; *b)* $\frac{x+6}{3}=0$; *c)* $\frac{3}{x+6}=0$; *d)* $3(x+6)=3x-18$.

5. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha az átfogója 10 egység és az egyik befogója 6 egység! Számítsd ki a másik befogót! Hány területegység a háromszög területe?

6. Karcsi elköltötte pénzének $\frac{2}{5}$ részét, Jancsi pedig a 30%-át. Mindkettőjüknek ugyanannyi pénze maradt. Melyiküknek volt több eredetileg? (A válaszodat indokold is!)

7. Melyik lehet valamilyen testnek a hálózata?
Nevezd meg a kapott testeket!




*Feladatlap* „B"

1. Végezd el a kijelölt műveleteket:

*a)* $421{,}1+6{,}66-0{,}792=$ *c)* $70{,}23 \cdot 1{,}06$

*b)* $0{,}36:40=$ *d)* $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{3}-\frac{2}{5}:\frac{6}{5}$.

2. Egy téglalap egyik oldala 3,2 dm, a másik ennek $\frac{5}{8}$ része. Hány méter a téglalap kerülete?

3. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$x \mapsto \frac{1}{2}x-\frac{7}{2} \quad \text{és} \quad x \mapsto -2x+4.$$

Olvasd le a grafikonok metszéspontjának ($M$) koordinátáit!

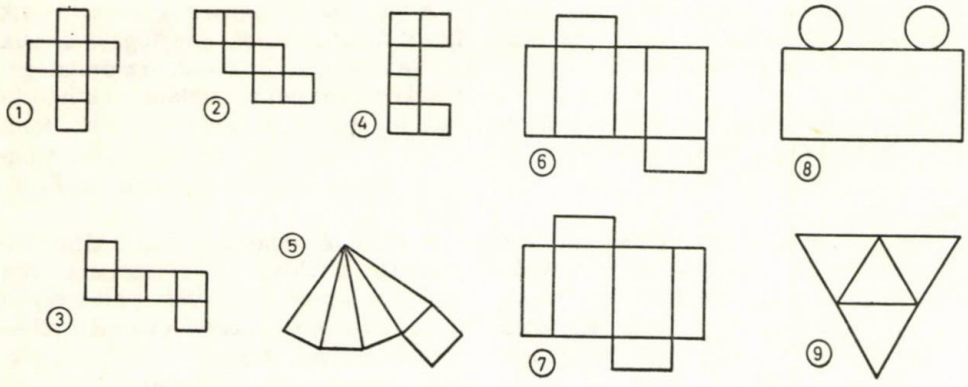
4. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

*a)* $2(x+4)=0$; *b)* $\frac{x-4}{2}=0$; *c)* $\frac{2}{x-4}=0$; *d)* $2(x+4)=2x+8$.

5. Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha az alapja 6 egység, a hozzá tartozó magasság 4 egység! Számítsd ki a szár hosszát! Mekkora a háromszög területe?

6. Panni és Kata szeptembertől több zsebpénzt kap. Panni a régi zsebpénzének az $\frac{1}{3}$ részével, Kata pedig a 40%-ával kap többet. Most mindkettőjüknek ugyanannyi zsebpénze van. Ki kapott kevesebbet régen? (A válaszodat indokold is!)

7. Melyik lehet valamilyen testnek a hálózata? Nevezd meg a kapott testeket!




## II. A felmérés tapasztalatai

**1.** Az első feladatcsoport pozitív racionális számokkal a négy alapművelet elvégzését kívánta meg a tanulóktól. Az *a)* már 5. osztályban, a *b)*, *c)*, *d)* feladat 7.-ben minimumkövetelmény. A szakmunkásképzők matematika tanterve elvárja, hogy a tanulók „racionális számkörben az alapműveleteket *pontosan* és *megbízhatóan* végezzék. Tudják eredményeiket *megbecsülni* és *ellenőrizni*."

Az összeadás, kivonás írásbeli elvégzéséhez a tanulóknak helyiérték szerint egymás alá kellett írniuk a számokat. 58-an (7,2%) már itt hibáztak, mert egészként kezelték a feladatban előforduló számokat és csak arra ügyeltek, hogy az utolsó számjegyek egymás alá kerüljenek. Hasonló tévesztés a szorzásnál is előfordult, ahol a tizedesvesszőt egyszerűen elhagyták mind a tényezőkből, mind az eredményből.

A kivonásban hibázók túlnyomó többsége a kivonandó utolsó jegyét változatlanul írta le.

A 10-et sem éri el azoknak a száma, akik *bővítés nélkül, hibátlanul* végezték el az *osztást.*

A többség bővített, sokan rosszul. Elég gyakori volt, hogy a kitűzött feladat reciprokát számolták ki.

A szorzásnál a már említett hiba mellett sokan tévedtek a tizedesvessző helyének a megállapításában: a szorzatban *balról* számolták a tizedesjegyeket. Sajnos az egyszeregyben is tévesztenek és a 0 szorzásában is hibáznak.

A teljesítmények alacsonyak (összeadás—kivonás 69%; osztás 40,7%; szorzás 53,8%) és megegyeznek az órai tapasztalatokkal. Az egyes évfolyamok összehasonlításából (2. melléklet, lásd a borítón!) az is kiderül, hogy a harmadikos éppúgy téveszt, mint az elsős; *a három évfolyam között nincs lényeges eltérés.*

A feladatok javítása megerősítette azt a tapasztalatunkat is, hogy még *harmadikra sem alakul ki* a tanulókban *az eredmények ellenőrzésének igénye,* hiszen a valóságtól távol álló eredményeket is elfogadták.

A *közönséges törtekkel* végzett műveletek területén valamivel *jobb a helyzet,* bár az eredmény jóval gyengébb az előzőnél: 34,8%. Ennek oka az, hogy a fel-

adattal foglalkozók 1/4-e *műveleti sorrendet* tévesztett, a „balról jobbra" szabályt alkalmazva ott, ahol ez nem érvényes.

A *törtek szorzási szabályát* a többség *helyesen* alkalmazta; a leggyakoribb hiba az összeadásra tanult szabály hibás analógiája volt. Az osztásnál már több a bizonytalankodó, főleg abban, hogy az osztandónak vagy az osztónak vegye a reciprokát.

*Viszonylag kevés* (6%) azoknak a tanulóknak a száma, akik a törtek különbségét a számlálók és nevezők különbségeként állapították meg.

*Meglepő*, hogy a tanulóknak csak *egy töredéke* vette észre az *egyszerűsítési lehetőségeket*, pedig *harmadikban* éppen az algebrai törtekkel végzett műveletek során ez áll a feladatok középpontjában.

**2.** A tanterv előírja, hogy „biztonságosan tudjanak a mértékegységekkel bánni...", „pontosan és megbízhatóan tudják kiszámítani a síkidomok területét és kerületét. Tudjanak háromszöget szerkeszteni, ismerjék a Pitagorasz-tételt és alkalmazzák terület- és kerületszámításokban".

Ezen követelmények megvalósulásának mértékét akartuk megállapítani a **2.** és **5.** feladattal.

A téglalap kerületének és a háromszög területének *kiszámítási módját* a gyerekeknek *több mint a fele ismeri*. A többieknél nem volt ritka a háromszög területére adott *abc*, $\frac{abc}{2}$; $\frac{abc}{3}$; $\frac{a+b+c}{2}$ képlet. Gondot okozott a *derékszögű* háromszög területének kiszámítása még azoknak is, akik egyébként helyesen írták fel az $\frac{am_a}{2}$ összefüggést, mert „hiányzott" nekik az átfogóhoz tartozó magasság. (Nem jöttek rá, hogy a két befogóból számolhatnák!) Néhányan ezt méréssel pótolták.

*Szerkesztési feladatok* megoldására másodikban a második félévben kerül sor, így ez mindhárom évfolyamon elég távoli anyag. Ennek ellenére sokan foglalkoztak vele, amiből arra következtethetünk, hogy *szívesen használják* a rajzeszközöket, de nem mindig helyesen. Szerkesztés helyett csak rajzoltak, sok esetben rosszul használták fel az adatokat, illetve olyanokat is felhasználtak (szög), amit a feladat nem tartalmazott.

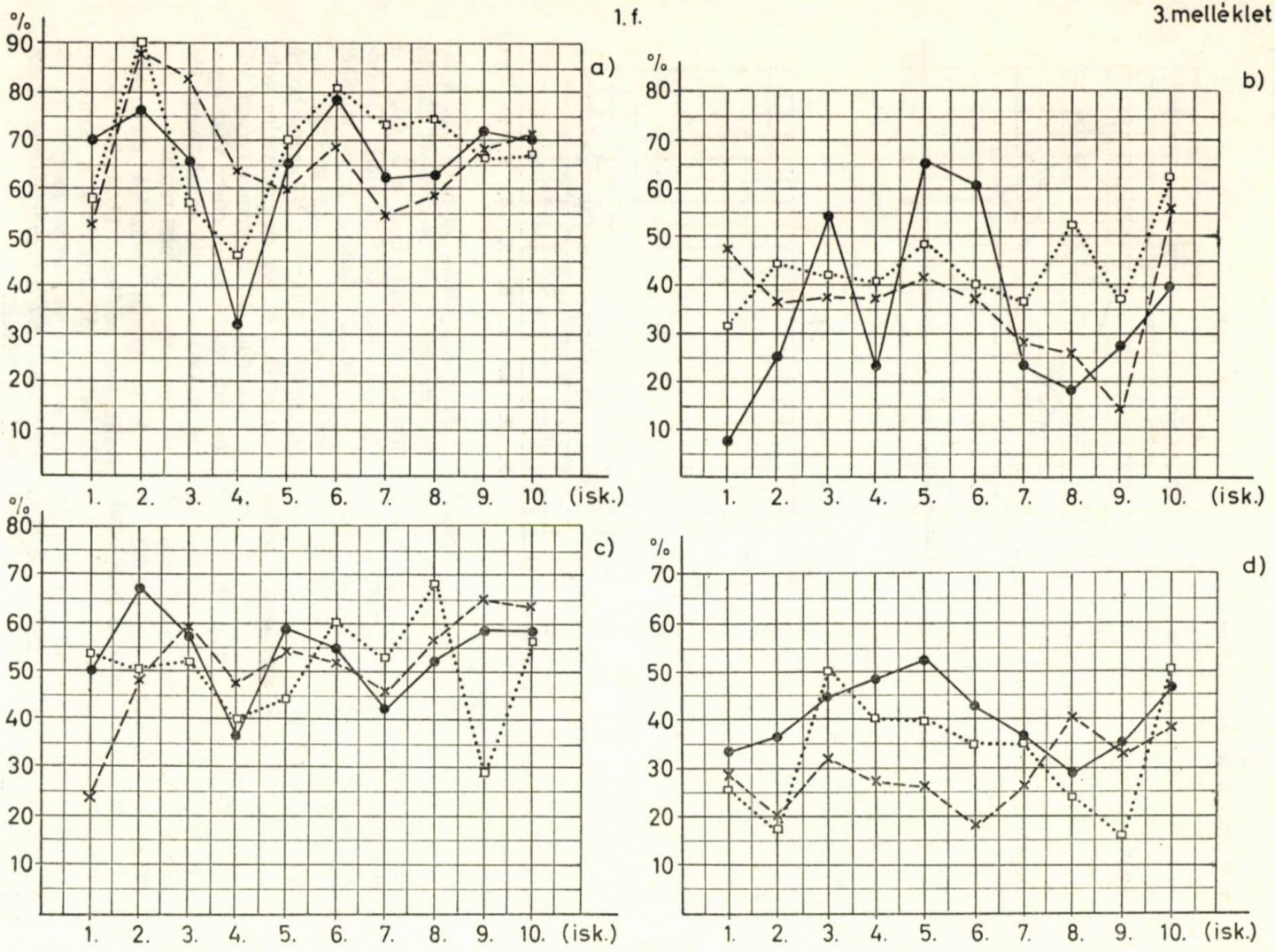
A szerkesztés menetének leírására csak kevesen vállalkoztak. Megfogalmazásaik pontatlanok, terjengősek. Az óralátogatásokon hasonlót tapasztalunk: szívesebben mutatja a táblánál a gyerek, mint mondja, gyakoriak az egyszavas válaszok, vagy a nagyon bonyolult megfogalmazások.

A hiányzó oldal megállapításához Pitagorasz tételének alkalmazására volt szükség. *Két iskola elsősei* — akik éppen akkor foglalkoztak ezzel a témakörrel — *kiugró eredményt* értek el (l. 6. melléklet), a többi elsős teljesítménye — akik még nem ismételték át — a másod- és harmadéveseké alatt marad.

**3.** Hetedik osztályban minimumkövetelményként fogalmazza meg a tanterv: „Tudjanak egyenleteket megoldani próbálgatással, algebrai vagy grafikus úton"; a szakmunkásképzőben ehhez hasonló az elvárás: „Tudjanak egyismeretlenes *elsőfokú egyenletet* algebrai úton *megoldani*. *Biztosan alkalmazzák* az egyenletek ekvivalens átalakításához szükséges legegyszerűbb *azonosságokat*. Eredményeiket ellenőrizzék."

Nézzük, mi teljesül mindebből! Az egyszerű, akár fejben vagy kitalálással megoldható egyenletekre 17 gyerek azt írta, hogy ezeknek nincs megoldásuk, mert 0 van a jobb oldalon.

A tanulók többsége foglalkozott a feladatokkal, jól-rosszul alkalmazva a tanult szabályokat: felbontották a zárójelet vagy eltávolították a törtet, majd a mérlegelvvel eljutottak a megoldáshoz. *Hibás összevonás ritkán* fordult elő, de a zárójel felbontásában vagy a tört eltávolításában sokan tévedtek. Pl. a gyerekek 1/10-e az $\frac{x+6}{3}=0$ egyenletből 3-mal való szorzás után a $3x+18=0$ egyenlethez jutott.


%
a)
b)
c)
d)
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. (isk.)

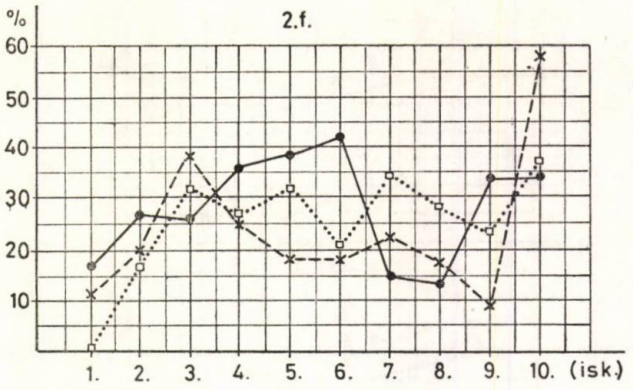
A szorzásnál említett hiba — a nulla szorzása — a *b)* feladatnál is jelentkezett, a *c)* feladatnál pedig — ahol változót is tartalmazó kifejezéssel szoroztak — általános volt.

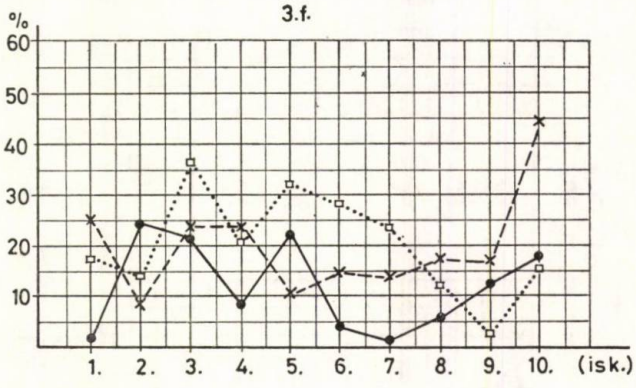
A tanulók jelentős részének (majdnem 4/5-ének) nem természetes, hogy nincs megoldása az egyenletnek. Sokan nem tudják, hogy egy egyenletnek végtelen sok gyöke is lehet. Mindenáron valamilyen konkrét számot akarnak kihozni, és ennek érdekében a legfantasztikusabb átalakítások végrehajtására képesek még azok is, akik az *a)* és *b)* feladatban nem hibáztak. Nem ritka a $\frac{3}{x+6}=\frac{3}{x}+\frac{3}{6}$ átalakítás, vagy a $3x+18=$ $=3x-18$ egyenlet következményeként kapott $6x=$ $=36$.

Az egyenletek ellenőrzéséért külön pont nem járt, a felmérés során azt tanácsoltuk, hogy fejben próbálják ki a kapott eredményt. Természetesen sokan inkább leírták, és ebből az is kiderült, hogy jelentős részüknél ez csak egy formális dolog — végrehajtja, mert a tanár megköveteli —, az ismeretlen helyére beírják a kapott számot, a műveleteket már nem végzik el.

A teljesítmények *némi javulást* mutatnak a három évfolyam során (2. melléklet), de nem kielégítőek. Különösen a *c)* feladat 7%-os összteljesítménye aggasztó és harmadikban a csökkenés elgondolkodtató, hiszen a törtes egyenletek megoldásakor hasonló problémákkal kellett találkozniuk.

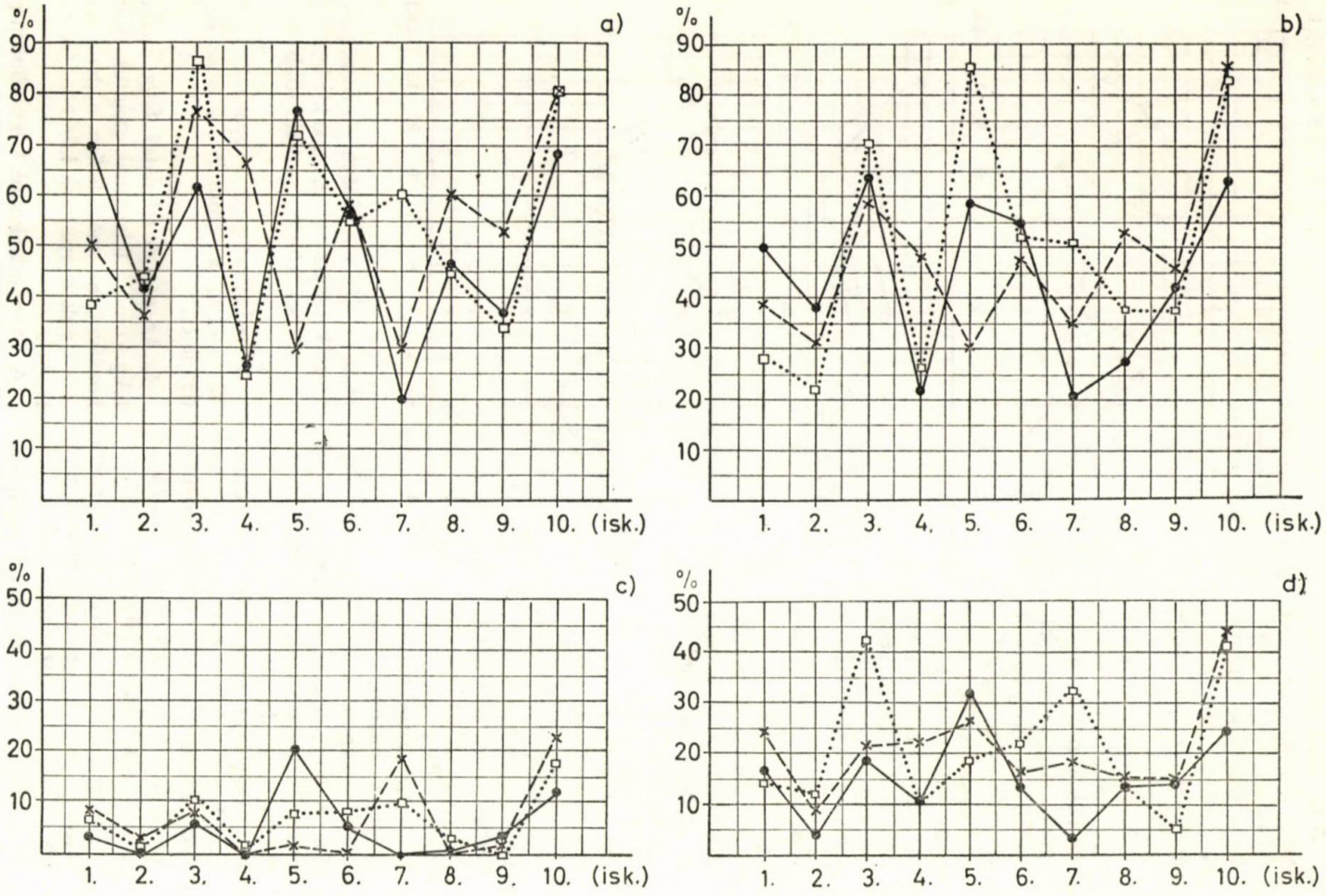
**4.** Grafikonok készítése, vizsgálata, függvények ábrázolása szakmai órákon is elég gyakori.




*Az óralátogatások tapasztalatai,* a témazáró *dolgozatok eredményei* alapján arra számítottunk, hogy a **3.** *feladat a legsikeresebbek* közé tartozik. Csalódtunk. Annak ellenére, hogy mindkét lineáris függvény a „megszokott" formában került kitűzésre, 242 gyerek hozzá sem kezdett és 309 eredménytelen volt. Ez utóbbiak 1/3-a *egyenes helyett* különböző, szabálytalan görbe vagy egyenes szakaszokból álló vonalat vagy két párhuzamos félegyenest rajzolt.

A táblázattal ábrázolók dicséretére válik, hogy az általuk kiszámított koordinátákkal jól ábrázolták a pontokat, *a koordináta-rendszerben megfelelően tájékozódnak. E téren van fejlődés* az elmúlt évekhez képest.

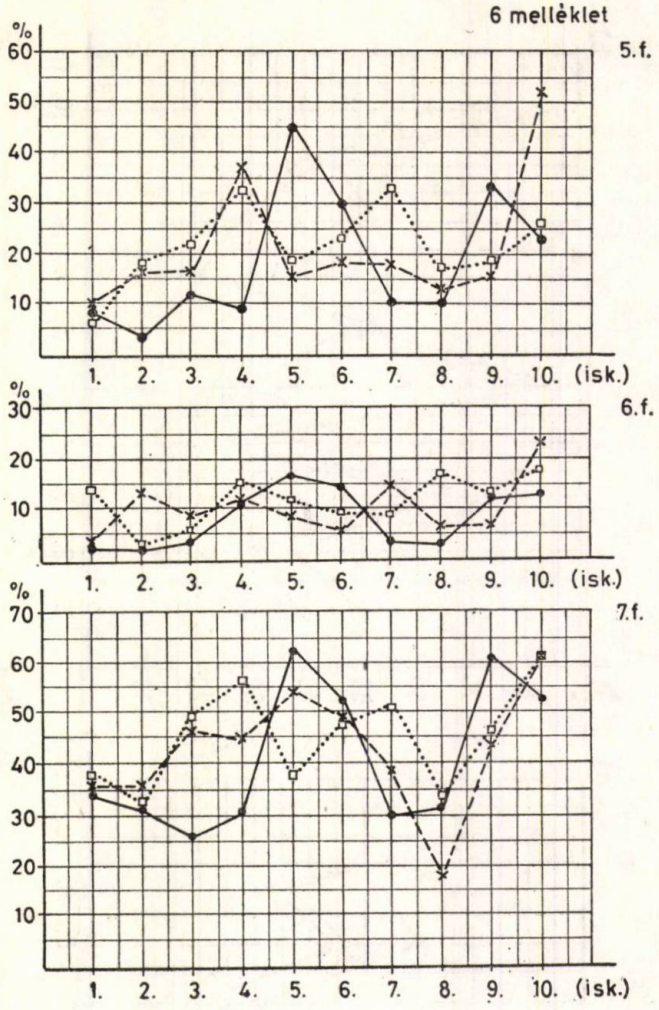

%
a)
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. (isk.)
%
b)
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. (isk.)
%
c)
50
40
30
20
10
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. (isk.)
%
d)
50
40
30
20
10
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. (isk.)

A baj az, hogy a függvény képlete nem idézi fel a függvény képét, sok értékből, sok hibával számolnak, és ezeket *gondolkodás nélkül* elfogadják.

A feladattal foglalkozók másik része táblázat nélkül próbált ábrázolni. Általánosan jellemző volt, hogy *rosszul emlékeztek* az együttható jelentésére, vagy a negatív előjelét nem vették figyelembe. Sajnos nem volt ritka az sem, hogy $\frac{7}{2}$ helyett 7,2-nél állapították meg a tengely metszését.

Mindössze 102 gyerek oldotta meg hibátlanul a feladatot. A három évfolyamon a 13%—23%——19%-os teljesítmények messze elmaradnak az órai tapasztalatoktól.

6 melléklet




**5.** A mindennapi életben és a szakmai gyakorlatban egyaránt ritka, hogy egy „felírt" egyenletet kelljen megoldanunk. Ezt az esetek többségében nekünk kell megállapítanunk *a feladat szövege alapján*. A beszélgetések és látogatások azt mutatják, hogy a szakmunkástanulók jelentős része idegenkedik a szöveges feladatoktól. Ezt megerősíti felmérésünk is (l. 8. melléklet). *A 804 gyerekből mindössze 28 adott hibátlan választ,* közülük ketten konkrét pénzösszegek változtatásával jutottak helyes következtetésre.

Próbálkoztak egyenlettel, de nem sokra jutottak, mert *ugyanazzal a betűvel jelölték* a kiindulási pénzmennyiségeket.

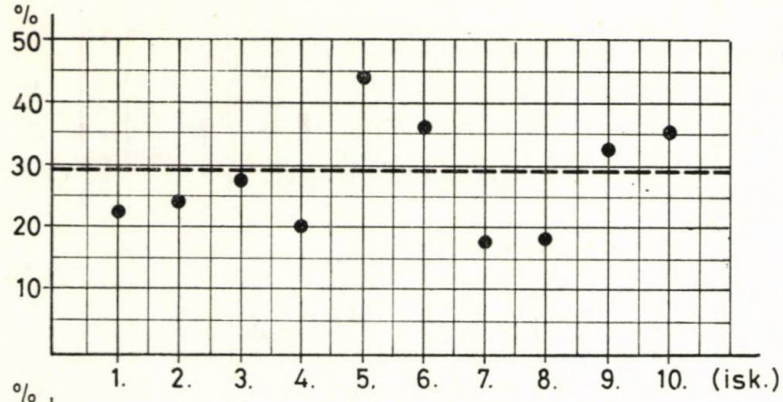
Akadtak tippelők is, mások pedig következtetéssel keresték a választ: a törtrészt — elég sok hibával — összehasonlították a százalékkal, majd kijelentették: aki többet költött, annak több pénze volt.

A teljesítményeik gyengék: 8%—12%—11%, a három év folyamán fejlődés nincs.

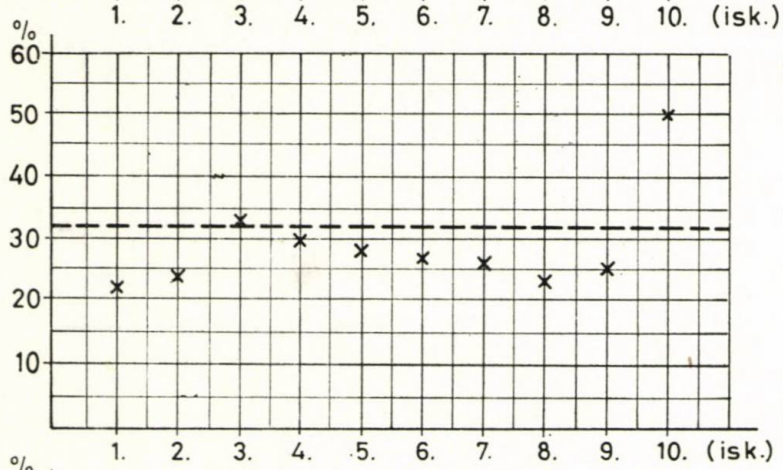
**6.** Az utolsó feladatot félig játékos, félig komoly feladatnak szántuk. Várakozásunknak megfelelően nagyon népszerű volt a gyerekek körében. (8. melléklet).

A bizonytalankodók közül többen papírból kitépték a hálózatokat és így

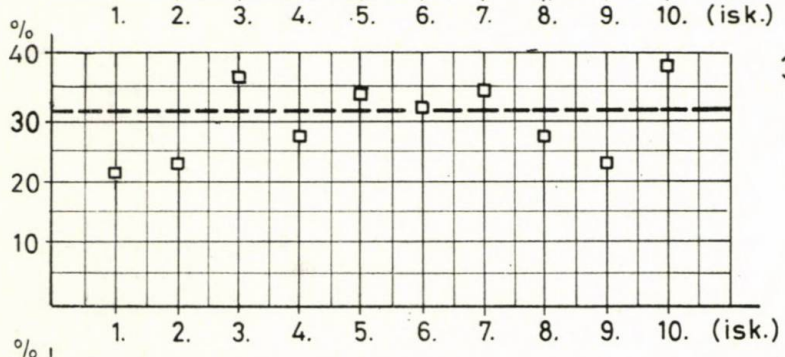
7. melléklet



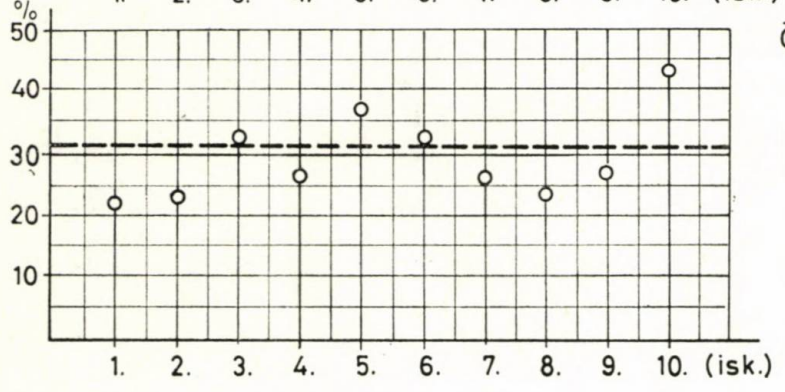

1. évf.




2. évf.

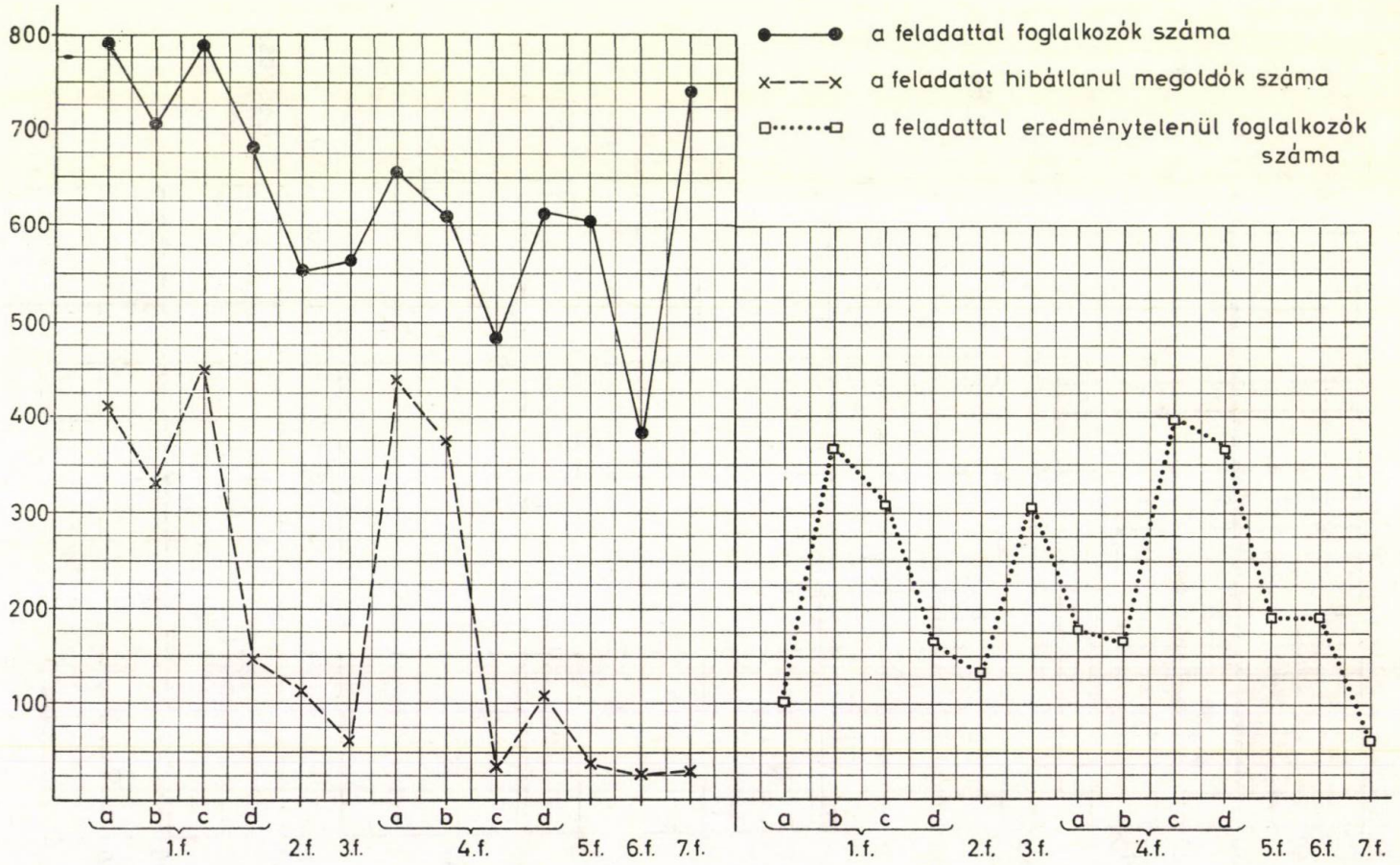



3. évf.




Összes

8. melléklet


a feladattal foglalkozók száma
a feladatot hibátlanul megoldók száma
a feladattal eredménytelenül foglalkozók száma
800
700
600
500
400
300
200
100
a b c d
1.f.
2.f.
3.f.
a b c d
4.f.
5.f.
6.f.
7.f.
a b c d
1.f.
2.f.
3.f.
a b c d
4.f.
5.f.
6.f.
7.f.

*9. melléklet*

A teljesítmények (%-ban) évfolyamonként és összesen

| | 1. | | | | 2. | 3. | 4. | | | | 5. | 6. | 7. | Összes f. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *a* | *b* | *c* | *d* | | | *a* | *b* | *c* | *d* | | | | |
| Elsősök | 67 | 37 | 55 | 39 | 29 | 13 | 52 | 46 | 6 | 16 | 19 | 8 | 43 | 29,3 |
| Másodikosok | 69 | 40 | 53 | 30 | 28 | 23 | 59 | 52 | 8 | 25 | 25 | 12 | 44 | 32,1 |
| Harmadikosok | 70 | 45 | 52 | 34 | 26 | 19 | 58 | 53 | 7 | 23 | 21 | 11 | 45 | 31,2 |
| Összes tanuló | 69 | 40,7 | 53,8 | 34,8 | 28,3 | 18,8 | 56,7 | 50,7 | 7,4 | 21,5 | 22 | 10,9 | 44,2 | 30,9 |

ellenőrizték válaszaik helyességét. Ez is hozzájárult ahhoz, hogy a gyerekek *többsége helyesen válogatott.*

A testek megnevezésével már súlyosabb gondok vannak. Általánosan előforduló hiba, hogy *kocka* helyett *négyzetet, téglatest* helyett *téglalapot,* gúla helyett kúpot írnak.

Az évfolyamok között nincs eltérés, az eredmények a jobbak közé tartoznak.

### 7. *Összegezve*

A 804 tanuló a kitűzött feladatok 78%-ával foglalkozott.

Hibátlan dolgozat nem volt, mindössze 22 a 40 pont feletti (47-et lehetett elérni).

A tanulóknak majdnem a fele 10 pont alatt teljesített, sokukat éppen a 7. feladattal szerzett 1—2 pont mentette meg a 0-tól.

Az egyes évfolyamok teljesítménye: 29,3% (első évf.), 32,1% (második évf.), 31,2% (harmadik évf.), *nem mutat lényeges eltérést, számottevő fejlődés nincs az alapismeretekben.*

Tudásuk nem elég szilárd, emlékező- és megtartóképességük gyenge. Jól mutatja ezt, hogy a napi anyagban vagy a nem túl régen tanult anyagban jobb eredmények születtek: például a **3.** feladatban. Ennél az iskolák többségében a másodikosok és harmadikosok „grafikonja" az elsősöké felett van (4. melléklet).

## III. Általános észrevételek

**1.** Minden tanuló megkapta a feladatlapot, de a dolgozatot más lapra írták. Így a feladatok megoldási *sorrendjére* is következtethettünk. Legtöbben az **1., 4., 7.,** illetve a **4., 1., 7.** sorrendet választották, és ha ezt összevetjük a 3-6, illetve a 8. mellékletekkel, ezeknél a feladatoknál a legmagasabbak a teljesítmények is. A gondolkodást igénylő **6.** vagy **2.** feladat az utolsó helyekre szorult, vagy teljesen elmaradt.

**2.** Szólnunk kell a dolgozatok külső alakjáról is. Itt nem az írásképre gondolunk elsősorban — bár ez is lehetne szebb —, hanem az áttekinthetőségre; a megoldás elrendezéséből mennyire követhető nyomon a gondolkodás menete.

Voltak nagyon szép, áondos munkák. A többség sajnos nem ilyen. Rendezetlen, kusza, összefirkált dolgozatok szép számmal akadtak.

**3.** Két feladatnál (**5., 6.**) szöveges megfogalmazást is kértünk. Mint már erről korábban szó volt, nem túl sokan vállalkoztak erre.

*Bizonyítási képességük* gyenge, igényük sincs rá, tapasztalatunk szerint a kitalált és a megoldással kapott végeredményt egyenértékűnek tekintik.

4. Azt, hogy mennyire értették meg a feladatok szövegét, nem tudtuk mérni (tény, hogy a felmérés során mindössze az utolsó feladatnál tettek fel kérdést — nem tudták, mit jelent a hálózat), de hogy mennyire *figyelmetlenül olvasnak, arra* a megoldásokból következtethettünk. Pl. a második feladatban a gyerekek többsége *nem váltotta* át a dm-ben kapott kerületet, vagy a 3. feladatban a metszéspont leolvasásáról feledkeztek el. Voltak olyanok is, akik rosszul másolták át az adott számokat.

5. Az utolsó feladatban a hibás elnevezések vagy a 2. feladatban a $\frac{3}{4}$ rész helytelen értelmezése arra figyelmeztet, hogy tanulóink egy része *nem ismeri a matematika szakkifejezéseit.* Erre a továbbiakban nagyobb gondot kell fordítanunk, mert eredményt csak akkor várhatunk, ha egy nyelven beszélünk.

## IV. Mit tehetünk, hogy eredményeink javuljanak?

1. Ebben a tanévben több kerületben került sor olyan általános iskolai munkaközösségi foglalkozásra (XXI., XIII., XVI., VIII.), amelyet egy szakmunkásképzőben tartott bemutató órával kapcsoltak össze. Bízunk abban, hogy ezeknek a *tapasztalatcseréknek* eredményeként, valamint az *általános iskolai korrekció* következményeként szilárdabb alapismeretekkel érkeznek a tanulók a szakmunkásképző iskolákba.

2. A *csoportbontás* — elsősöknél — jótékony hatásáról már vannak tapasztalataink. Lehetőséget kellene biztosítani, hogy — ahol ehhez a személyi és tárgyi feltételek adottak — másod- és harmadévben is élhessenek ezzel az iskolák.

A kiscsoportos foglalkozásoknál más, hatékonyabb módszerek *(egyéni foglalkozás, differenciálás)* szorgalmazásával csökkenthetők a hiányok.

3. Tanáraink többsége eddig is sokat tett azért, hogy megtanítsa gyerekeinket számolni, gondolkodni, ismereteiket alkalmazni. A kudarc oka nem a tanári lelkiismeretesség vagy a tanulói képességek hiánya, hanem a szorgalom, a tanult ismeretek rögzítésének hiánya, továbbá a más területeken is tapasztalt érdektelenség.

Éppen ezért munkájukban nagyobb szerepet kell kapnia a *folyamatos ismétlésnek,* a házi feladatoknak, a *következetesebb követelménytámasztásnak* és ellenőrzésnek, végül, de nem utolsósorban az érdeklődés felkeltésének és ébren tartásának.

LÉNÁRT ISTVÁN
tudományos segédmunkatárs
Budapest

# Két geometriai feladatsor

A feladatok legtöbbje a *gömbi geometria* olyan fogalmairól szól, amiket szembesíteni, ütköztetni lehet a megfelelő síkgeometriai tapasztalatokkal. Néhány, elsősorban topológiai jellegű problémánál a sík és a gömb hasonlóan viselkedik, de a *tórusz (gyűrű) geometriája* mindkettőjüktől különbözik: ezért egy-két ilyen feladat is szerepel. A feladatokhoz hasznos segédeszköz a *rajzgömb-készlet* (kapható a TANÉRT boltjaiban), aminek legfontosabb részei a futball-labda nagyságú műanyag *gömb,* a gömb alátámasztására is felhasználható *tórusz* és a gömbi főkörök rajzolására és mérésére alkalmas *gömbvonalzó.*

**1.** Rajzolj a karikára két egyforma virágot úgy, hogy egymástól a lehető legmesszebb legyenek!

Most rajzolj két egyforma lepkét úgy, hogy akármelyik lepke mind a két virágtól egyforma messze legyen! (Ha megmutattad a tanító néninek, letörülheted! Ezentúl csak akkor figyelmeztetlek, ha a rajzot a feladat végén *nem* szabad letörölni, mert még szükség lesz rá.)

**2.** A kígyó fél a sünitől, a süni fél a embertől, az ember fél a kígyótól. Rajzold fel őket a karikára, ahogy körbekergetik egymást úgy, hogy mindegyik egyforma messze legyen a másik kettőtől!

**3.** Tedd rá a gömböt a karikára, és rajzolj rá egy pici, háromágú csillagot!

Most rajzolj a gömbre egy másik, háromágú csillagot, ami az elsőtől a lehető legtávolabbra esik! Hány ilyen, „legtávolabbi" csillagot lehet ugyanehhez az elsőhöz találni?

Rajzolj most valahová máshová a gömbre egy négyágú csillagot, és keresd meg ennek is a „legtávolabbi" párját! Ha megtaláltad a helyét, rajzolj oda is egy négyágú csillagot!

**4.** Rajzolj a gömbre egy pici, ötágú csillagot, és rajzold fel a „legtávolabbi" párját! Most rajzolj a gömbre egy olyan űrhajót, amelyik mind a két csillagtól egyforma messze repül, hogy mind a kettő egyszerre figyelhesse!

Tudsz még több ilyen űrhajót rajzolni?

**5.** Vegyél egy darab cérnát, ami körülbelül olyan hosszú, mint a filctollad, és két kis darab ragasztószalagot (például celluxot vagy szigetelőszalagot)! Most ragaszd le a cérnát a padodra úgy, hogy feszes legyen! Milyen alakú lesz a feszes cérna?

Tedd mellé a vonalzót!

**6.** Most ugyanezt a darab cérnát ragaszd fel a gömbre úgy, hogy megint feszes legyen! Milyen alakú lesz a feszes cérna? Tedd mellé a gömbvonalzó alsó élét (ami sűrűn be van vonalkázva)!

Tedd mellé a gömbvonalzó másik, ritkábban bevonalkázott élét is!

**7.** Vegyél egy matchboxot vagy LEGO-kiskocsit, és krétázd be a kerekeit! Most told végig a kiskocsit a pad lapján úgy, hogy közben az irányát nem változtatod! Figyeld meg a keréknyomokat! Tedd közéjük a vonalzót!

**8.** Vedd elő a gömböt, és told rajta ügyesen a krétás kerekű kiskocsit úgy, hogy közben az irányát nem változtatod! Figyeld meg itt is a keréknyomokat! Tedd közéjük a gömbvonalzó alsó élét!

**9.** Tedd a gömbvonalzót a padra úgy, hogy az alsó, sűrű beosztás fölfelé nézzen, és a vonalzó a két fülén, meg a hátsó, kerek támasztó bütykön álljon! Most tedd bele a gömböt a gömbvonalzóba, és húzd végig a filctollat a sűrű beosztás mentén!

Milyen vonalat kaptál?

(Ne töröld le!)

**10.** Hány részre osztotta szét ez a vonal a gömböt? Melyik rész a nagyobb?

A kecske szereti a káposztát. Rajzolj a vonal egyik oldalára egy kecskét, a másik oldalára egy káposztát. Oda tud-e menni a kecske a káposztához úgy, hogy közben nem kell átlépnie a vonalon?

**11.** Kösd át a karikát egy zsineggel, mintha fel akarnád valahová akasztani! Rajzolj most a karikára, a zsineg egyik oldalára egy kecskét, a zsineg másik oldalára pedig egy káposztát! Odamehet-e a kecske a káposztához úgy, hogy közben nem lép át a zsinegen?

**12.** Tedd bele megint a gömbvonalzóba a gömböt, és rajzold körbe a sűrű beosztás mentén! Milyen vonalat kaptál? Vedd ki a gömböt a vonalzóból és tedd rá a karikára! Tedd rá most a gömbvonalzót úgy, hogy a sűrű él az előbb körberajzolt vonal fölé essen!

Nézd meg most a ritkább beosztást a fülek mellett! Középen látsz egy hosszabb vonalat. Ennek a végére, a gömbre rajzolj egy pontot! Írd oda ehhez a ponthoz: „Északi-sark"!

(Ne töröld le!)

**13.** Most fordítsd meg az egész gömböt a karikán úgy, hogy az „Északi-sark" legalulra, a karika közepébe kerüljön! Tedd a sűrű beosztást a gömbön levő körhöz (most a másik oldalára kerül). Keresd meg újra a hosszú jelet a fülek között, és jelöld be a gömbön a pontot! Írd oda a ponthoz: „Déli-sark"!

A nagy körhöz pedig írd oda: „Egyenlítő"!

**14.** Rajzolj a gömbre, a gömbvonalzó sűrű éle mentén, egy nagy kört! Mozdítsd most el a gömböt, és rajzolj még egy nagy kört! Hány találkozási pontja lesz a két körnek?

(Ne töröld le!)

**15.** Legfeljebb hány nyuszit tudsz berajzolni a gömbre úgy, hogy akármelyik két nyuszi között legalább egy elválasztó vonal legyen?

Színezd ki a nyuszikat úgy, hogy szomszéd nyuszik (amelyeket pontosan *egy* vonal választ el) ne legyenek azonos színűek!

(Még mindig ne töröld le!)

**16.** Vannak-e a nyuszik között olyanok, amelyeknek egyforma nagy rész jutott a gömbből?

**17.** Próbáld a két nagy kört úgy megrajzolni, hogy mindegyik nyuszinak egyforma nagy birodalom jusson!

**18.** Nézd meg a gömbvonalzó sűrű beosztását! Háromféle vonalat látsz rajta: hosszút, közepeset és rövidet. Válaszd ki valamelyik hosszú vonalat és írj fölé egy 0-t!

Most indulj el a skálán jobb felé (mintha írnál), és a következő, hosszú jel fölé írj egy 1-est! Így járd körbe a beosztást, míg a 0-hoz vissza nem érsz! Hány hosszú vonalat számoltál?

(Ne töröld le a számokat a gömbvonalzóról!)

**19.** Rajzolj a gömbre egy „Északi-sarkot", „Déli-sarkot" és „Egyenlítőt", mint a 12—13. feladatokban. Tedd a gömbvonalzó 0-jelét az Északi-sarkhoz! Hányadik hosszú vonalnál lesz a Déli-sark?

Forgasd most el a gömbvonalzót úgy, hogy a 0-jel maradjon az Északi-sarkon! Hányadik jelhez kerül a Déli-sark? (Most már ennek a példasorozatnak a végéig ne töröld le!)

**20.** Tedd újra a 0-jelet az Északi-sarkhoz, és húzd körbe a filctollat a sűrű él mentén! Jelöld meg azokat a pontokat, ahol ez az újabb kör találkozik az Egyenlítővel!

Illeszd most a sűrű beosztást az Északi-sark és valamelyik találkozási pont mellé úgy, hogy a 0-jel az Északi-sarkhoz kerüljön! Hányadik hosszú jelhez kerül a találkozási pont?

Próbáld ki a másik találkozási pontra is!

**21.** Most a fülek közti, hosszú vonal végét illeszd valamelyik találkozási ponthoz, és ebben a helyzetben, a sűrű él mentén, rajzold körbe a nagy kört!

Hány nagy kört rajzoltál a gömbre?

**22.** Legfeljebb hány nyuszit lehet úgy a gömbre rajzolni, hogy akármelyik két nyuszi között legalább egy elválasztó vonal, vagyis határvonal legyen?

**23.** Színezd ki a nyuszikat úgy, hogy szomszéd nyuszik (amelyeket pontosan egy határvonal választ el) ne legyenek azonos színűek!

**24.** Igazságos-e ez az elosztás? Egyforma nagy birodalmat kapott mindegyik nyuszi?

**25.** Hány találkozási pont van összesen a gömbön?

**26.** Hány határvonal van összesen a gömbön — vagyis olyan vonal, aminek mind a két végpontja találkozási pont, és több találkozási pont már nincs rajta?

**27.** Hány birodalommal szomszédos egy birodalom?

**28.** Rajzolj egy-egy Napot mindegyik birodalom kellős közepébe! A szomszédos Napokat kösd össze egymással! Milyen formát kaptál?

## A GÖMBI GEOMETRIA NÉHÁNY ALAPFOGALMA (FELADATGYŰJTEMÉNY) (11—12 ÉVESEKNEK)

**1.** Rajzolj a füzetedbe egy pici autót, és valahová máshová a lapra egy hozzávaló pici garázst! Milyen útvonalon menjen az autó a lapon, hogy leggyorsabban érjen a garázsba? Rajzolj a lapra más autókat is! Ezeknek milyen útvonalon kell menniük, hogy leggyorsabban érjenek a garázsba?

**2.** Vegyél egy darab cérnát és két kis darab celluxot! Ragaszd le a cérna egyik végét valamelyik autóhoz! Hogyan lehet a cérnát úgy odaragasztani a garázshoz, hogy az autó és a garázs közti cérnadarab feszes legyen?

**3.** Vegyél egy vonalzót, és próbáld odailleszteni a feszes cérnához! Sikerül?

Próbáld odailleszteni a vonalzót a többi autó és a garázs közé rajzolt, leggyorsabb utakhoz is!

**4.** Igaz-e, hogy egy megadott autótól a megadott garázsig csak egyetlenegy leggyorsabb út vezet?

**5.** Rajzolj a gömbre egy pici autót, és valahová máshová a gömbre egy hozzávaló pici garázst! Milyen útvonalon menjen az autó a gömbön, hogy leggyorsabban érjen a garázsba? Rajzolj a gömbre más autókat is! Ezeknek milyen útvonalon kell menniük, hogy leggyorsabban érjenek a garázsba?

**6.** Vegyél egy darab cérnát és két kis darab celluxot! Ragaszd le a cérna egyik végét valamelyik autóhoz! Hogyan lehet a cérnát úgy odaragasztani a garázshoz, hogy az autó és a garázs közti cérnadarab feszes legyen?

**7.** Vedd a gömbi vonalzót, és próbáld a rajzoló élét odailleszteni a feszes cérnához! Sikerül?

Próbáld odailleszteni a gömbvonalzót a többi autó és a garázs közé rajzolt, leggyorsabb utakhoz is!

**8.** Igaz-e, hogy egy megadott autótól a megadott garázsig csak egyetlenegy, leggyorsabb gömbi út vezet?

Állítsd rá a gömböt a tóruszra (a gyűrűre), és a legmagasabb pontjához rajzolj egy pici autót! Most fordítsd meg a gömböt úgy, hogy az autó a gömb legalján legyen, és rajzolj a gömb legtetejére egy pici garázst! Milyen útvonalon menjen az autó a gömbfelületen, hogy a leggyorsabban érjen a garázsba?

**9.** Ragaszd egy cérna egyik végét egy kis darab celluxszal az autóhoz! Hogyan ragaszthatod le a cérnát a garázshoz úgy, hogy az autó és a garázs közti cérnadarab feszes legyen? Csak egyféleképpen lehet leragasztani?

**10.** Rajzolj a füzetedbe két pontot! Illeszd hozzájuk a vonalzót, és rajzolj egy egyenes vonalat a két ponton keresztül! Hány részre bontja szét a két pont a rajtuk átmenő egyenes vonalat? Színezd be a részeket más-más színűre!

**11.** Az így kapott egyenesdarabok közül lehet-e valamelyiket a vonalzóddal megmérni? Ha lehet, mérd is meg!

**12.** Mit nevezzünk akkor a síklapon két pont távolságának?

**13.** Rajzolj a gömbre két pontot! Illeszd hozzájuk a gömbvonalzó nagy rajzolóélét (ami sűrűn be van vonalkázva), és rajzold körbe a vonalat a rajzolóél mentén! Mit kaptál?

**14.** Állítsd szembe magaddal a gömböt a tóruszon úgy, hogy a megrajzolt vonal egy függőleges, egyenes vonalnak látsszon! Milyen két darabra osztja szét ez a vonal a gömbfelületet?

**15.** Rajzolj két másik gömbi pontot, és csináld végig velük is a 13., 14 feladatokat!

Még két pontot! — és újra!

**16.** Rajzolj egy pontot a gömb legtetejére, aztán fordítsd meg a gömböt úgy, hogy a pont a gömb legaljára kerüljön! Rajzolj most egy másik pontot ebben a helyzetben a gömb legtetejére, és próbáld a gömbvonalzó rajzolóélét a két ponthoz illeszteni! Csak egyféleképpen lehet?

Rajzolj fel három különböző lehetőséget!

**17.** Válaszd ki a gömbvonalzó sűrű skálájának valamelyik, hosszabb vonallal jelölt osztásrészét, és írj fölé egy 0-t! Indulj el most a skálán jobb felé (mintha írnál), számolj az osztásrészeken tízig, és a kapott, hosszabb osztásrészhez írj 10-et! Így folytasd körbe a skálán, míg a 0-hoz vissza nem érsz! Hány fokos a beosztás?

**18.** Rajzolj a gömbre két pontot, és a gömbvonalzóval rajzold meg a rajtuk átmenő gömbi főkört! Hány részre osztja a két pont a főkört? Színezd be a részeket más-más színűre!

**19.** Az így kapott főkördarabok közül lehet-e valamelyiket a gömbvonalzóval megmérni? Ha lehet, mérd is meg!

**20.** Melyiket tekintsük a gömbön két pont gömbi távolságának: a hosszabb vagy rövidebb főkördarabot?

Ha a hosszabbra szavaznánk, mekkora lenne egy pont távolsága saját magától?

**21.** Rajzolj a gömbre egy pontot; tedd mellé a gömbvonalzó 0-jelét, és jelöld be a gömbön a gömbvonalzó 180 fokos jelét! Most forgasd a gömbvonalzót akárhogyan, csak arra vigyázz, hogy a 0-jel az eredeti ponttól el ne mozduljon! Hol lesz a 180 fokos jel helye?

**22.** Rajzolj még néhány gömbi pontot, és próbáld megkeresni az ikertestvérüket ezzel a „0 fok — 180 fok" módszerrel! Van-e minden gömbi pontnak egyetlenegy ikertestvére? Ha egy ELSŐ pont ikertestvére egy MÁSODIK pont, akkor melyik pont lesz a MÁSODIK pont ikertestvére?

**23.** Vegyél egy pontot és az ikertestvérét, vagyis egy átellenes pontpárt! Oda tudod-e illeszteni a gömbvonalzó nagy rajzolóélét az átellenes pontpár egyik pontjához úgy, hogy a *másik* ponthoz az él *ne* illeszkedjen?

**24.** Mekkora a gömbi távolsága két, egymással átellenes gömbi pontnak?

**25.** Rajzolj a füzetedbe egy piros egyenest, és metszd el egy másik, kék egyenessel! Mi lesz a két egyenes közös része? Most rajzolj a piros egyenessel párhuzamos, zöld egyenest! Mi lesz a két, egymással párhuzamos egyenes (a piros és a zöld ) közös része?

**26.** Rajzolj a gömbre egy piros főkört, és metszd el egy másik, kék főkörrel! Mi lesz a két főkör közös része?

Hogyan helyezkednek el a metszéspontok egymáshoz képest? Most próbálj a piros főkörrel párhuzamos, zöld főkört rajzolni — vagyis olyan, zöld főkört, amelynek nincs a piros főkörrel közös pontja!

Vannak-e a gömbön párhuzamos főkörök?

**27.** Párbaj a síklap egyenes vonala és a gömb főköre között: Melyik a jobb? Valaki az osztályból képviseli az egyenest, másvalaki a főkört, és összemérik a tulajdonságaikat: távolság, végtelenség-végesség, metszéspontok, párhuzamosság stb.

**28.** Rajzolj a füzetedbe egy pontot, szúrd bele a körződ, és rajzolj egy kis kört! Nyisd ki nagyobbra a körzőt (a tű marad ugyanabban a pontban), és rajzolj egy nagyobb kört! Csináld ezt meg még néhányszor!

Mit gondolsz, milyen nagyra kell kinyitnod a körzőt, hogy a körző már egyenes vonalat rajzoljon?

**29.** Vegyél egy begörbíthető lábú körzőt, és a begörbített lábára celluxszal vagy szigetelőszalaggal ragassz fel jó erősen egy filctollat, — úgy, hogy a filctoll vége túlérjen a körző ceruzahegyén! Ragassz most egy darab celluxot a gömbre, szúrd bele óvatosan a tűt, és rajzolj egy kis kört! Nyisd ki nagyobbra a körzőt (a tű marad ugyanabban a pontban), és rajzolj egy nagyobb kört! Csináld ezt meg még néhányszor — ha kell, hajlítsd befelé a körző filctollát!

Mit gondolsz, milyen nagyra kell kinyitnod a körzőt, hogy a körző már gömbi főkört rajzoljon?

**30.** Nézd meg a gömbvonalzó nyergén legfelül, középen a hosszabb vonalat! Illeszd ezt a vonaljelet a celluxon levő lyukhoz, a körök középpontjához, és rajzold körbe a nagy rajzolóél menti főkört! Hol lesz ennek a főkörnek a középpontja?

**31.** Rajzolj a gömbre egy pontot, és nevezd el Északi-sarknak! Hogyan lehet a gömbvonalzód segítségével az ehhez az Északi-sarkhoz tartozó Egyenlítőt megrajzolni? Ha pedig az Egyenlítő már megvan, hogyan lehet a gömbvonalzó segítségével a Déli-sarkot is megtalálni?

Mi lenne a különbség, ha az első pontot nem Északi-sarknak, hanem Déli-sarknak neveztük volna?

**32.** Rajzolj fel még egy pontot a gömbre, és csináld végig az előző pont szerkesztéseit!

Még egyet, utoljára!

**33.** Rajzolj fel egy gömbi főkört, és nevezd el Egyenlítőnek! Hogyan lehet a gömbvonalzód segítségével az ehhez az Egyenlítőhöz tartozó sarkpontokat megtalálni?

**34.** Rajzolj fel még egy gömbi főkört, és keresd meg ennek is a sarkpontjait a gömbvonalzó segítségével!

Még egyszer, utoljára!

Tudod-e biztosan, hogy a sarkpontok közül melyik lesz az Északi-sark, melyik a Déli-sark, vagy úgy választhatod meg, ahogy akarod?

**35.** Rajzolj egy gömbi főkört, válaszd ki valamelyik pontját, és nevezd el 0 foknak! Hány olyan pontja van a főkörnek, ami a 0 fokos ponttól 10 fok távolságra esik? Rajzold be! A méréshez a gömbvonalzó nagy rajzolóélét használd!

Ugyanígy 30 fok — 45 fok — 60 fok — 90 fok — 120 fok — 135 fok — 150 fok — 180 fok távolságra!

**36.** A gömbvonalzó segítségével rajzolj egy főkör-Egyenlítőt, és a hozzá tartozó egyik sarkpontot! Most rajzolj egy olyan főkördarabot, ami a sarkpontból indul és az Egyenlítőnél végződik! Mérd meg a hosszát!

Rajzolj még három ugyanilyen főkördarabot, és mérd meg azokat is !

**37.** Felezd meg az előző ábra főkördarabjait! Milyen messze lesznek ezek a felezőpontok az Északi-sarktól?

Igaz-e, hogy mindannyian egyugyanarra a főkörre esnek, vagyis, lehet olyan főkört húzni, ami mindegyik felezőponton átmegy?

**38.** Rajzolj a füzetedbe két, egymást metsző egyenest! Hány szögtartományra osztottad szét a síkot?

Mérd meg a szögeket a szögmérőddel! Vannak-e köztük egyenlők?

**39.** Rajzolj egy egyenest a füzetedbe, és jelöld ki egy pontját! Tedd a ponthoz a vonalzó élét, és forgasd körbe a vonalzót! Lesz-e olyan helyzet, mikor a vonalzóél egyenese és az első egyenes négy egyforma szögtartományra osztja szét a síkot?

**40.** Rajzolj a füzetedbe két olyan, egymást metsző egyenest, amelyek négy egyforma szögtartományra osztják fel a síkot!

Mérd meg a szögeiket!

Mi a nevük az ilyen egyeneseknek?

**41.** Rajzolj a gömbre két gömbi főkört! Hány szögtartományra osztottad szét a gömbfelületet?

Vedd a két főkör valamelyik metszéspontját, illeszd hozzá a nyereg felezőpontját (a póluspontot), és rajzold körbe a gömbvonalzó nagy főkörét! Hány részre osztja ezt a főkört az eredeti két főkör?

Mérd meg a négy főkördarabot! Vannak-e köztük egyenlők?

**42.** Rajzolj egy főkört, és keress hozzá olyan, másik főkört, hogy a két főkör a gömbfelületet négy egyenlő szögtartományra ossza fel!

Rajzold fel a metszéspont egyenlítőjét, és mérd meg a négy főkördarabot!

**43.** Rajzolj olyan szögtartományt, vagyis két félkörívvel határolt gerezdet, aminek a szöge 30 fok— 45 fok — 60 fok — 90 fok — 120 fok — 135 fok — 150 fok — 180 fok — 270 fok — 360 fok!

**44.** Lehet-e a síkon vonalzóval szöget mérni, vagy szögmérővel távolságot mérni?

Lehet-e a gömbön a gömbvonalzóval távolságot is, szöget is mérni?

**45.** Rajzolj egy főkört, illeszd rá valahol a póluspontot (a nyereg legmagasabb pontját), és ebben a helyzetben rajzold meg a gömbvonalzó teljes főkörét ! Hogyan áll a két főkör egymáshoz képest?

Illeszd most a főkör másik pontjához a póluspontot, és próbáld ki újra a szerkesztést!

Még egyszer, utoljára!

**46.** Rajzolj a füzetedbe két, egymást metsző egyenest! Van-e olyan egyenes, amelyik a két, egymást metsző egyenes közül *mindkettőre egyszerre* merőleges?

**47.** Rajzolj a füzetedbe két, egymással párhuzamos egyenest! Van-e olyan egyenes, amelyik a két, egymással párhuzamos egyenes közül *mindkettőre egyszerre* merőleges?

**48.** Rajzolj a gömbre két főkört! Van-e olyan főkör, amelyik a két főkör közül *mindkettőre egyszerre* merőleges?

Ha van, hány ilyen van?

Válassz két másik főkört, próbáld ki újra!

Még kettőt, utoljára!

**49.** Párbaj a merőleges egyenesek és a merőleges főkörök között: Melyik a jobb? Milyen tulajdonságaik hasonlítanak, és milyen tulajdonságaik különböznek egymástól?

TETTAMANTI EDIT — DR. GYARAKI F. FRIGYES
osztályvezető — tudományos főmunkatárs
OPI — Budapesti Műszaki Egyetem
Budapest — Budapest

# Matematikai olimpia

## az iberoamerikai országokban

A matematikai tehetségek gondozására nálunk régóta nagy súlyt helyeznek. A különböző országokban, kontinenseken rendezett nemzetközi matematikai olimpiákon diákjaink elért kimagasló eredményei is igazolják ezt. Talán éppen ezért érdekes lehet, ha a világ más régióiban rendezett (regionális) matematikai olimpiák rendszeréről és eredményeiről információkat szerzünk.

Ebben a kis ismertetőben például az iberoamerikai államokban ezen országok részére megrendezett II. Matematikai Olimpia bemutatásával szeretnénk az ott kialakult szokásokat, rendszert, illetve magukat a feladatokat ismertetni. A matematikai olimpiákat ebben a régióban az iberoamerikai országok tudományos, oktatási és kulturális kormányzati szervezeteit, átfogó, koordináló nemzetközi szervezet, az OEI (Organizacion de Estados Iberoamericanos para la Educacion, la Ciencia y la Cultura)* rendezi.

Most Uruguayban rendezték meg a II. Iberoamerikai Matematikai Olimpiát 1987-ben. Az olimpián 43, 1967. január 23. után született középiskolai tanuló vett részt Bolívia, Brazília, Kolumbia, Kuba, Spanyolország, Puerto Rico és Uruguay képviseletében, országonként két tanár vezetésével. A meghívást különben minden iberoamerikai ország oktatási minisztériuma megkapta. A hivatalos rendező szervek fedezték az Uruguay-i tartózkodás költségeit, minden résztvevő számára. A verseny 3 aranyérmét két spanyol és egy brazil diák kapta, a 7 ezüstérmet 3 kubai, két brazil, egy kolumbiai és egy perui kapta. A 10 bronzérem egy brazil, 3 kolumbiai, egy kubai, egy chilei, 2 spanyol, egy puerto ricói és egy uruguay-i gyerek között oszlott meg.

A csoportversenyben Kuba végzett az első helyen 202 ponttal, a másodikon Brazília 191 ponttal, a harmadikon Spanyolország 183 ponttal.

Három különdíjat is kiosztottak egy kolumbiai, egy brazil és egy kubai versenyző között. Mindegyikkel ezüstérem is járt. Az olimpia megnyitóján a város polgármestere, valamint az OEI oktatási igazgatója elnököltek. A záró és a díjkiosztó ünnepélyen részt vett az oktatási és kulturális miniszterhelyettes, a város polgármestere és az OEI oktatási igazgatója. Az I. Iberoamerikai Matematikai Olimpiát 1985 decemberében Kolumbiában rendezték meg. Ez a második a folyamatosságot jelenti. Az olimpia célja, hogy fokozza az ifjúság érdeklődését a matematika iránt és elősegítse az oktatás minőségének javítását. A következő (III.) olimpia színhelyéül Perut javasolták.

Az Uruguayban jelen levő delegáció állásfoglalása szerint a III. olimpiának 4 olyan vonása lesz, amely különbözik az első kettőtől:

1. a rendezés időpontjaként sokkal praktikusabbnak tűnik március vagy április, mint a december és január;
2. a feladatokat, amelyeket eddig a kulturális és oktatási élet kiemelkedő személyei javasoltak, az iberoamerikai országok nemzeteinek neves szakemberei fogják megadni;
3. a következő olimpiákon nem vehet részt olyan tanuló, aki már más nem-

* Tettamanti Edit—Gyaraki F. Frigyes: Az Iberoamerikai Államok Szervezete az Oktatásért, a Tudományért és a Kultúráért, Pedagógiai Szemle, 1987. május, 5. sz. 479—483. old.

zetközi versenyen aranyérmet nyert;

4. más eseményeket is beiktatnak az olimpiák idejére, mint pl. a középfokú matematikatanárok találkozóját, szimpóziumokat és módszertani anyagok kiállítását.

Másrészt elhatározták, hogy a 13 ország, amely eddig részt vett az olimpiákon, egy állandó titkárságot állít fel, amelyet az OEI koordinál, s amelynek a feladata az olimpiák elősegítése és szervezése.

Egy bizottság — amelynek Bolívia, Kuba, Kolumbia, Spanyolország, Puerto Rico és Uruguay a tagja — fogja a feladatokat kiválasztani, egy másik bizottság, amelyben Argentína, Chile, Honduras, Peru és Paraguay vesznek részt, a matematika fejlődésével, valamint oktatásának problémáival fog foglalkozni, amely minden olimpia körül felmerül. Végül Peru és az OEI a soron következő olimpiák szervezésével lesz elfoglalva. Az OEI a nemzeti matematikai bizottságokkal és az oktatási minisztériumokkal vállalja a védnökséget és elősegíti a kommunikáció és az információ eszközeinek fejlesztését a matematika tanításának fejlesztésével kapcsolatban, különös tekintettel a középfokú oktatásra.

A II. Iberoamerikai Matematikai Olimpia résztvevőinek a következő, Samuel Greitzer, az Egyesült Államok Rutgers Egyetemének tanára és Nemzetközi Matematikai Bizottság tagja által javasolt feladatokat kellett megoldania:*

**1.** Határozza meg azokat az $f$ függvényeket, amelyekre

$$[f(x)]^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x,$$

ha $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

**2.** Legyen az $ABC$ háromszög $AC$, illetve $AB$ oldalának felezőpontja $M$, illetve $N$, a $BM$ és a $CN$ egyenesek metszéspontja $P$. Bizonyítsa be, hogy ha az $ANPM$ négyszög érintőnégyszög, akkor az $ABC$ háromszög egyenlő szárú!

**3.** Bizonyítsa be, hogy ha $m$, $n$, $r$ pozitív egész számok és

$$1+m+n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{2r-1},$$

akkor $m$ négyzetszám.

**4.** A $p_m (n=1, 2, \ldots)$ sorozat első eleme $p_1=2$; ha $n \geqq 2$, akkor $p_n$ a $p_1 p_2 \ldots p_{n-1}+1$ kifejezés legnagyobb prímosztója. Bizonyítsa be, hogy $p_n$ 5-től különböző!

**5.** Ha $r$, $s$, $t$ az $x(x-2)(x-7)=2$ egyenlet gyökei, akkor bizonyítsa be, hogy $r$, $s$ és $t$ pozitív számok, majd számítsa ki $\operatorname{arc\,tg} r + \operatorname{arc\,tg} s + \operatorname{arc\,tg} t$ értékét!

$$\left(\text{Megjegyzés: } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2} \text{ és } \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x.\right)$$

**6.** A $P$, illetve a $Q$ pont az $ABCD$ konvex négyszög $AD$, illetve $BC$ oldalának olyan pontja, amelyekre

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC}.$$

Bizonyítsa be, hogy a $PQ$ egyenes az $AB$ és $DC$ egyenesekkel egyenlő szöget zár be!

Ez az ismertető az OEI lapjában, az EDUCACCION-ban megjelent részletes beszámoló alapján készült.**

---

* A fordítás utáni végleges pontosításnál és finomításnál Rábai Imre egyetemi adjunktus nyújtott segítséget.

** Carlos Bueno Fernando Galvez; Ralph Costa: Se celebran en Uruguay las II. Olimpiadas Iberoamericanas de Matematicas; EDUCACCION, Ano IV. Numero 1. Enero—Febrero de 1987.

I. M. JAGLOM
Moszkva

# Pólya György (születésének 100. évfordulójára)

A következő megemlékezés a „Matyematyika v Skolje" című folyóirat 1988. évi 3. számában jelent meg; a cikk szerzőjének, a neves szovjet matematikusnak és pedagógusnak feltehetően ez az egyik utolsó munkája. I. M. Jaglom ez év április 17-én meghalt. A cikknek témáján kívül ez adja szomorú aktualitását. Az eredeti cikkből csak néhány, a magyar olvasó számára kevésbé érdekes bekezdést hagytunk ki. (A fordító.)

1987 decemberében ünnepeltük Pólya György születésének 100. évfordulóját. Pólya a matematikatanítás módszertana és a matematika tudománya európai iskolájának egyik legmarkánsabb képviselője, kiváló magyar tudós volt. A magyar tudósoknak ahhoz a kiemelkedő nemzedékéhez tartozott, amely nagy hatást gyakorolt a XX. században a fizikai-matematikai gondolkodás fejlődésére.

A magyar származású kiemelkedő tudósok sorában találjuk például századunk egyik legnagyobb matematikusát, Neumann Jánost; a funkcionálanalízis megteremtőit, Riesz Frigyest és Riesz Marcellt, a két testvért, valamint Haar Alfrédet, Radó Tibort, Szőkefalvi Nagy Bélát, Fejér Lipótot; a kiemelkedő logikust, Lakatos Imrét; a számelmélet, a valószínűségszámítás specialistáját, Rényi Alfrédot; a modern mechanika egyik megteremtőjét, Kármán Tódort; a nagy fizikus generáció képviselőit, Wigner Jenőt, Szilárd Leót, Teller Edét. A magyar sikerek még jelentősebbnek tűnnek, ha figyelembe vesszük, hogy a XIX. században az egyetlen világszínvonalú magyar matematikust, Bolyai Jánost életében nem ismerték el és ismeretlenül halt meg. Igaz, a II. világháború előtti Magyarországon igen sok kiváló tudósnak egyszerűen nem jutott munkahely, és legtöbbjük élete nagyobbik részét hazájától távol töltötte. A hagyomány alapján legtöbben Németországba mentek, de a fasizmus uralomra jutása után a „magyar áradat" az Egyesült Államokba irányult. Ezek a tudósok azonban magyarságukat megőrizték, és Magyarország joggal büszke rájuk.

Ma már a magyar tudósoknak nem kell elhagyniuk hazájukat, de hatásuk ma is elég nagy más országok tudományára, oktatására. Anglia matematikai életében említésre méltó szerepet játszik a Lakatos-iskola, az Egyesült Államokban pedig a Neumann-iskola. Közvetlenül megfigyelhető például az amerikai matematika fejlődésén a magyar származású tudósok keze nyoma. Például a New York-i Courant matematikai intézet vezetője a budapesti születésű Peter Lax, a „The American Mathematical Monthly" szerkesztője Halmos Pál, aki Budapesten végezte a gimnáziumot. Világszerte jól ismert a matematikusok és pedagógusok darthmouthi csoportja, vezetőjük, Neumann tanítványa, John Kemeny (A BASIC nyelv megalkotója) — magyar származású amerikai.

Nem könnyű megmagyarázni az okait annak, hogy Magyarországon ilyen jelentős virágzásnak indultak a fizikai-matematikai tudományok, azonban egy-két dolgot érdemes megemlíteni ezzel kapcsolatban. Számomra úgy tűnik, hogy vitathatatlan a kapcsolat a magyar matematikusok kiváló eredményei és az iskolai tehetséggondozás, tehetségfejlesztés kedvező feltételei között. Mindenekelőtt a magyar középiskolai matematikaversenyek nagy hagyományára gondolok, ezek a versenyek 1894-ben indultak (L. Kürschák József, Neukomm Gyula, Hajós György, Surányi János: Matematikai versenytételek, IV. kiadás Tankönyvkiadó, 1987.; oroszul 1976, Moszkva, Mir kiadó).

Különösen figyelemre méltó a budapesti (fasori) evangélikus gimnázium ma-

gas színvonala, az előzőekben felsorolt tudósok jó része ott végzett. A fasori gimnázium kiváló matematikatanára, Rátz László hosszú évekig tanított ott, nevét érdemes megjegyezni.

Wigner Jenő abban a beszédében, amelyet Stockholmban, a Nobel-díj átvételekor mondott (1963-ban), különös köszönetét fejezte ki Rátz Lászlónak. Úgy tűnik, ez volt az egyetlen alkalom, amikor a Nobel-díj kitüntetettje tanárának mondott köszönetet. Ily módon nem csodálkozhatunk azon, hogy sok magyar matematikus tanúsít élénk érdeklődést az iskolai matematikai nevelés iránt. Közülük is mint pedagógus bizonyára az egyik legismertebb Pólya György, szintén a fasori gimnáziumban végzett.

Pólya György 1887. december 13-án született Budapesten. A középiskola elvégzésekor már eldöntötte, hogy matematikus lesz, ez az elhatározása végleges volt. Beíratkozott a budapesti tudományegyetem matematika szakára, de már diákévei alatt bizonyos időt töltött Párizs, Bécs és Göttingen egyetemein, ahol új emberekkel és új tudományágakkal ismerkedett meg. Ily módon a diákévek egyben a vándorlás éveit is jelentették számára. Göttingenben Pólya megismerkedett és megbarátkozott Szegő Gáborral, aki fiatalabb volt Pólyánál és néhány évvel később ugyancsak a fasori gimnáziumban végzett. Mindketten (különböző években) első helyen végeztek a középiskolai tanulmányi versenyen. A két jelentős matematikus és pedagógus barátsága nem kis szerepet játszott további sorsuk alakulásában.

Az egyetem elvégzése után Pólya Zürichben a nevezetes Politechnikai főiskolán kapott állást, itt dolgozott Minkowski, Einstein, Neumann és Weil is. Több mint 25 évig tanított itt előbb docensként, majd professzorként. Ezekben az években gyakran tartott előadásokat, előadássorozatokat Európa és Amerika számos egyetemén.

1940-ben Pólya elhagyta a vendégszerető Svájcot, ebben az időszakban már sok kényelmetlenséget jelentett a hitleri Németország fenyegető közelsége és európai agresszív fellépése. Átköltözött Stanfordba, Kaliforniába, ahol Szegő Gábor is dolgozott. Stanford, ez a kisváros elsősorban egyeteméről híres. Pólya élete végéig itt is maradt. 65 éves korában hivatalosan nyugdíjba ment (az amerikai és a legtöbb európai egyetemen szokásos hagyományoknak megfelelően), ekkor tiszteletbeli professzori címet kapott. Ez a cím a nyugdíjba vonult személy számára majdnem a teljes fizetését biztosítja és felruházza azzal a joggal (de nem kötelességgel), hogy az egyetemen (speciális) előadásokat tartson és hallgatókkal foglalkozzon. Ezt a jogot Pólya megbecsülte és még 90 éves korában is aktívan dolgozott az egyetemen.

Pólya élete utolsó napjaiig megőrizte széles látókörét, természetes élénkségét, az emberek iránti jóindulatú érdeklődését. Sokat olvasott és aktív kapcsolatot tartott emberekkel, többek közt számos tanítványával. Élete végén azonban súlyos megpróbáltatást élt át: 1985. augusztus 7-én Stanfordban meghalt Szegő Gábor. Pólya csak egy hónappal élte túl barátját, 1985. szeptember 7-én Stanfordban hunyt el, alig több mint 90 nappal 98. születésnapja előtt.

*Pólya György, a tudós*

1962-ben Stanfordban ünnepi ülést tartottak Pólya 75. születésnapja tiszteletére. A jeles tudós mindkét amerikai akadémia tagja, a Magyar és a Francia Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagja, számos egyetem díszdoktora és egy sor tudományos díj kitüntetettje volt már ekkor. Többek között megkapta az Amerikai Matematikai Társulat által alapított, „A matematikában elért kiemelkedő eredményekért" odaítélt díjat. (Igaz, szintén az amerikai társulat által adományozott, az alkalmazott matematika és technika fejlesztésében elért eredményekért járó díj kényelmetlen lehetett számára, mivel e díj neve: „Pólya pro-

fesszor-díj".) Pólya megünnepléséhez kapcsolódóan a stanfordi egyetem egy terjedelmes kötetet adott ki ezzel a címmel: „Eredmények a matematikai analízis és határterületei köréből. A 75 éves Pólya György tiszteletére összeállított tanulmányok". Ez a cím egy meghatározott kettősséget jelez; egyrészt az összeállító, Szegő Gábor érdeklődési körébe eső témákból, másrészt magának az ünnepeltnek a tudományos témáiból tartalmaz válogatást.

Időszerű, hogy itt néhány szót szóljunk a Pólya és Szegő közti különbségekről is. A magyar matematikai iskola e két kiváló képviselőjének barátságát egyáltalán nem zavarta, sőt inkább erősítette az az éles különbség, amely tudományos működésük és emberi alkatuk között található. Szegő Gábor ma is nagy tekintélynek örvend a XX. század analízissel foglalkozó kiemelkedő tudósai közt. A matematikában őt mindenekelőtt a szó tágabb értelmében vett matematikai analízis érdekelte, a matematikának azok a fejezetei vonzották, amelyek bonyolult formákkal kapcsolatosak és amelyek az analitikus technika virtuóz alkalmazását igénylik. (Jellemét tekintve kevésbé volt rugalmas, mozgékony és nehezebben tudott kontaktust teremteni az emberekkel, mint idősebb barátja.) Bár Pólya szintén otthonosan mozgott az analitikus technika mesteri kezelésében, elég könnyen váltott át a matematika egyik területéről egy másikra és a klasszikus analízistől távol eső területeken is jelentős eredményeket ért el.

Még a 20-as években kezdett Pólya aktívan foglalkozni *kombinatorikával,* akkor, amikor ez a tudományág még korántsem volt a matematika fejlődésének fő vonalában. Érdeklődésének újszerűsége barátait és tanítványait is zavarba ejtette. Ma már látjuk, hogy a kombinatorika iránti érdeklődése a nagy tudós zseniális előrelátása volt, jó előre megérezte az új korszakot és azt a jelentőséget, amire a kombinatorika a következő időkben szert tett. Valóban, századunk második fele a matematika véges (azaz végtelen eljárásokkal és határátmenettel nem kapcsolatos) területeinek felvirágzásával jellemezhető, amit a véges (diszkrét) működésű számítógépek megjelenése magyaráz. A véges matematika, amelyben fontos helyet foglal el a kombinatorika, ma a fizikában, a technikában és a biológiában is fontos alkalmazásra talál. Pólyát gyakran emlegetik a kombinatorika klasszikusaként is a szakirodalomban.

Pólyának bizonyára az egyik legismertebb és ma legtöbbet idézett *valószínűségszámítási* eredménye a következő, általa megfogalmazott és megoldott feladat: „Tekintsünk egy pontot, amely az egyenesen, a síkon vagy a térben a koordináta-rendszer 0 kezdőpontjából indul és véletlenszerűen bolyong a rácsegyenesek mentén az egész koordinátájú pontokban, azaz minden időpillanatban tovább lép a vizsgált pontból véletlenszerűen egyik szomszédos, egész koordinátájú pontba. Mi a valószínűsége, hogy a pont előbb-utóbb visszatér az 0 pontba? „Pólya megállapította, hogy az egyenesen vagy a síkon bolyongva ez biztosan bekövetkezik, de a „háromdimenziós" bolyongás esetén a 0 pontba való visszatérés valószínűsége lényegesen kisebb 1/2-nél (körülbelül 0,35).

Pólya egy további tudományos érdeklődési területe az *egyenlőtlenségekkel* kapcsolatos. Ismeretes, hogy ezen a területen szintén megelőzte korát, a tiszta és alkalmazott matematika optimalizálási problémákkal foglalkozó fejezeteinek viharos fejlődését.

A mozgékony Pólya többek között Angliában, a nagy hagyományú cambridge-i egyetemen is tartott „Egyenlőtlenségek" címmel előadássorozatot. Ezt követően ez a téma több változatban felbukkant Hardy és Littlewood neves angol matematikusok előadásaiban is. 1934-ben Pólyával együtt megjelent „Egyenlőtlenségek" című monográfiájuk, amely a témakör első komoly monográfiája volt és aktualitását azóta is megtartotta.

Pólya élénk érdeklődése az egyenlőtlenségek és az alkalmazott matematikai kérdések iránt még egyszer megnyilvánult a (Szegő Gáborral közösen írt) „Izoperimetrikus egyenlőtlenségek a matematikai fizikában" című könyvben. A könyv a mechanika és a fizika izoperimetrikus egyenlőtlenségeinek gyűjteménye, olyan egyenlőtlenségeké, amelyekben egy test valamelyik fizikai jellemzőjét az adott test egy másik jellemzőjével lehet megbecsülni. Az elnevezés a síkbeli alakzatokra vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenséghez kapcsolódik: $0 \leqq T \leqq \frac{\pi}{4} K^2$ (vagy más formában: $\infty > K \geqq 2\sqrt{\frac{T}{\pi}}$), ahol $T$ az alakzat területe, $K$ pedig a kerülete.

*Pólya György — a pedagógus*

A Pólya pedagógiájáról szóló beszámolót azzal a jelentős kétkötetes művel illik kezdeni, amelyet Szegővel közösen írt és először 1925-ben jelent meg németül (magyarul: Pólya György—Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből I.—II. Tankönyvkiadó 1980. Bp.) Ennek az egyedülálló feladatgyűjteménynek az alapvető sajátosságait a szerzők az előszóban igen plasztikusan érzékeltetik. Ide kívánkozik a bevezetőből egy olyan idézet, amelyben, mint cseppben a tenger, Pólya egész „heurisztikája" benne van, a matematika felfedeztető, fejlesztő oktatásáról vallott nézeteit tartalmazza. „Ez a könyv nem csupán egyszerű feladatgyűjtemény. Legfontosabb vonása az anyag módszeres elrendezése, melynek célja, hogy az olvasót önálló munkára ösztönözze és hasznos gondolatokat sugalljon neki. Több időt, gondot és aprólékos munkát szenteltünk annak, hogy megtaláljuk az anyag leghatékonyabb bemutatását, mint amennyit a beavatatlan az első pillanatra feltételezne.

A tényszerű ismeretek közlése számunkra másodlagos szempont. Célunk mindenekelőtt, hogy kialakítsuk az olvasó helyes szemléletét, a gondolkodás egy bizonyos rendezettségét..."

Itt nem szívesen, de megszakítom az idézetet. A könyv egész bevezetése igen figyelemreméltó, hiszen tartalmazza mindannak lakonikus, mondhatjuk aforizmaszerű kifejtését, amit *Pólya módszerének* nevezhetünk. Pólya mindig hangsúlyozza, hogy annak, aki nem hajlandó gondolkodni, matematikai felfedezésekhez eljutni, azt nem lehet matematikára megtanítani, de aki hajlandó a matematikára időt, energiát áldozni, azon lehet segíteni. Meg kell mondani neki a helyes kérdezési technikát, amely a munkáját rendszerbe foglalja. A feladatgyűjtemény egyes feladatsorai egyszersmint a gondolatok célszerű, hasznos sorrendjét is kijelölik. Pólya „heurisztikája" a tudományos munka egy gondosan, pontosan megtervezett lehetséges útja.

Érdemes megjegyezni, hogy a felfedezésről vagy a tudományos kutatásról szólva Pólya nem tesz különbséget egy nehéz feladaton dolgozó diák és egy új tétel bizonyításán töprengő hivatásos matematikus között. E két tevékenység között legfeljebb a befektett munka mennyisége alapján lehet különbséget tenni, elvi különbség nincs köztük. Ezt a ragyogó feladatgyűjteményt úgy lehet jellemezni, mint a heurisztika „gyakorlatát", míg egy későbbi Pólya-könyvet (A gondolkodás iskolája (How to Solve It?)) mint a heurisztika elméletét.

A „Feladatok és tételek..." közvetlenül az egyetemi hallgatóknak szól. Az iskolai matematikaoktatással Pólya az Egyesült Államokban került közvetlen kapcsolatba. A II. világháború utáni első években született meg az összamerikai matematikai olimpia (ma már Kanadát és az Egyesült Államokat is átfogja ez a verseny). Ennek a matematikai versenynek nagy tekintélye van (a győzteseknek a kitüntetéseket a Fehér Ház-

ban adják át, az emlékérmeket a pénzverdében készítik), a lebonyolítás rendszere azonban nagyon különbözik az európai versenyekétől. A versenyt az ország összes iskolájában egy meghatározott napon és órában rendezik, ekkor egyszerre bontják fel a központból küldött feladatokat tartalmazó borítékokat. A versenyen néhány tucat feladatot tűznek ki (számuk rendszerint 40 és 50 között van), viszonylag könnyűek a feladatok, mindegyikhez öt lehetséges választ csatolnak. Ezek közül kell kiválasztani az egyetlen helyes választ. A kidolgozásra fordítható idő nem túl sok, rendszerint 45 perc. Világos, hogy az ilyen tesztmódszerrel elsősorban az anyagtudást lehet ellenőrizni és kevésbé a képességeket.

Pólyától ez a versenyzési mód idegen volt. Az USA-ba érkezését követően igen hamar elkészített egy iskolai versenytervet a saját elvei alapján. A stanfordi olimpiák (a szervezőbizottság elnöke maga Pólya volt) hamarosan nagy népszerűségre tettek szert és mintául szolgáltak a jelenlegi, Washingtonban rendezett nemzeti matematikai versenynek, amely a nálunk megszokott forma megfelelője.

A versenyekkel kapcsolatban Stanfordban Pólya előadásokat és foglalkozásokat tartott az iskolásoknak, majd ezt követően a tanáraiknak is. Pólya szomorúan győződött meg arról, hogy az amerikai tanárok többsége nem tudja megoldani a versenyfeladatokat sem, nemhogy a tanítványaikat tudnák felkészíteni erre.

Az USA sok városában foglalkozott Pólya feladatmegoldó szemináriumokon matematikatanárokkal. Ezeket a foglalkozásokat különösen szerette. Először minden résztvevőnek olyan feladatokat ajánlott, amelyeknek megoldása általános módszerhez, általánosítható gondolatokhoz vezetett el.

Pólya, a pedagógus elérte azt, hogy a tanárok maguk (lehet, hogy nem az első kísérletre) fogalmazták meg ezt a módszert. Nagy figyelmet fordított a kérdések pontos megfogalmazására, a — nem feltétlenül matematikai — feladatmegoldás általános kultúrájának kialakítására. A szemináriumok következő részében a résztvevők egyéni feladatokat kaptak hosszabb gondolkodási időre. Pólya néha a táblához hívta a legjobb (vagy legrosszabb) megoldás szerzőjét, hogy az egész hallgatóság előtt mondja el, de többre becsülte a csoportos munkát olyan csoportokban, amelyeket maguk a hallgatók alakítottak ki. A csoportok önállóan dolgoztak a szemináriumvezető minimális irányításával. A csoport minden tagja időről-időre átvette a tanár szerepét, a többieket mint tanítványait kezelte, akik számára el kell mondani a feladatok megoldásait. Ezekhez a Stanfordban rendezett olimpiákhoz kapcsolódó szemináriumokhoz készült feladatanyag szolgált témaként Pólya további könyveihez.

Az így keletkezett könyvek közül elsőként „A gondolkodás iskolája" (How to Solve it?) jelent meg (magyarul először 1957-ben a Bibliotheca Kiadónál, a fordító Lakatos Imre volt).

Ez a tanár számára igen értékes könyv kisalakú. Váza egy „heurisztikai táblázat", amely bármiféle — nem feltétlenül matematikai — feladat megoldásához tartalmaz általános tanácsokat. A táblázat négy részből áll: 1. értsd meg a feladatot; 2. keress összefüggést az adatok és az ismeretek között (végül készítsd el a megoldás tervét); 3. hajtsd végre tervedet; 4. vizsgáld meg a megoldást. Természetesen ezeket a javaslatokat a szerző részletesen kifejti és kommentálja. Jó lenne, ha ez a táblázat ott lógna minden matematika szaktanterem falán.

A táblázat magyarázata a könyvben három részre bomlik. „A tanteremben" című részben a szerző részletesen elmagyarázza a táblázat lényegét ahhoz hasonlóan, ahogy a feladatmegoldó szemináriumokon csinálta. Ez a rész csak néhány példát tartalmaz, olyan példákat, amelyek jól illusztrálják a táblázat egyes

pontjait. A „Párbeszéd" című fejezet egy olyan képzelt beszélgetés leírása, amely a tanár és a tanulók közt folyik. Az első kiadás terjedelmének több mint 75%-át „A heurisztika rövid szótára" című rész alkotja. Ebben részletesen foglalkozik a heurisztikához kapcsolódó fogalmak magyarázatával.

A könyv igen tartalmas, de terjedelmi okok miatt néhány részében kényszerűen deklaratív jellegű. A kis terjedelem nem tette lehetővé, hogy a szerző a heurisztika általános szabályait kellő számú meggyőző példával illusztrálja. Feltehetően ez a körülmény is késztette Pólyát arra, hogy a „How to Solve It?" további részletes, alapos magyarázata és illusztrálásaként két jóval nagyobb terjedelmű könyvet adjon ki. Ezek: „A matematika és a plauzibilis következtetések" (Mathematics and plausible reasoning 1-2., Princeton, 1954) és „A problémamegoldás iskolája 1-2. Tankönyvkiadó, Bp. 1967, „Mathematical Discovery" angolul). Az első könyv címe arra utal, hogy a hagyományos értelemben vett „bizonyító matematikát" az jellemzi, hogy a szigorú dedukció a kapott eredmények végső megfogalmazásához vezet el, az eredmények megkereséséhez csak egy többé kevésbé plauzibilis (de még nem szigorúan bizonyított) következtetéslánc olat útján jutunk el. A fizika nyelvén mondva, ez utóbbi kísérleti munka. Csak ha eljutottunk a végeredményhez, a kívánt célhoz, akkor tudjuk megfelelő szigorú formába önteni a végeredményt, „eltüntetni a nyomokat", azaz eltakarni, átalakítani a megoldáshoz vezető utat.

Az említett három könyv fő célja a matematikatanítás olyan formájának megalapozása, amely alkalmas arra, hogy felébressze a tanulók alkotó kezdeményezését, amelyet a skolasztika homálya elborít.

A két utóbbi könyv szerkezete hasonló. Az egyes könyvek világosan, pontosan körülhatárolt fejezetekből állnak (az első egyes fejezetei például: „Indukció", „Általánosítás, specializáció, analógia", „Fizikai matematika", „Maximumok és minimumok", „Plauzibilis következtetések a felfedezésekben és a tanításban". A második könyvben ilyen fejezeteket találunk: „Rekurzió", „Szuperpozíciók". „Tervek és programok", „Kitalálás és tudományos módszer", „A tanulásról, a tanításról és a tanítani tanulásról") Mindegyik fejezet egy olyan résszel zárul, amely effektív példákat, magvas gondolatokat, szólásokat vagy egyszerű anekdotákat tartalmaz. Ezek a befejező részek a fejezet fő mondanivalójára irányítják a figyelmet. Sok érdekes példát kölcsönöz a tudomány klasszikusaitól, az olvasónak így alkalma nyílik arra, hogy megismerkedjen például Newton, Pascal, Euler gondolatmenetével. Bőven felhasználja a stanfordi matematikai olimpiák feladatait. Mindhárom könyvnek nagy sikere volt az olvasók körében, gyakorlatilag minden európai országban kiadták ezeket, de Ázsiában is sok helyen megjelentek.

Kissé más jellegű, de bizonyára még konkrétabb a középiskolai tanulók számára írt „Matematikai módszerek a természettudományban" (Gondolat, Bp. 1984) című könyve. A könyv borítólapján Galilei ismert szavai olvashatók: „A természet nagy könyve mindig nyitva áll szemünk előtt, és az igaz bölcselet van megírva benne. ... De nem olvashatjuk azt másképp, csak ha elébb megtanuljuk a nyelvet s jeleket, mellyel íratott... Matematikai nyelven van írva az, jelei háromszögek, körök és más geometriai formák..."

A könyv Galilei prófétai szavainak megvilágítását, magyarázatát szolgálja.

*(Fordította: Urbán János)*

RADNAINÉ SZENDREI JULIANNA
főmunkatárs
OPI

# Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek?

Biztosan nagy örömmel telhetett el Smullyan, amikor kitalálta ezt a címet, amelyik egy mondatba sűríti könyve témáját. Senki sem lepődik meg attól, hogy paradoxonokról van benne szó.

Nemcsak az olvasók, hanem a recenzióírók fantáziáját is megmozgatja a könyv témája és az ennek kifejezésére találóan választott cím. „Ha Smullyan professzor nem létezne, akkor ki kellene őt találni, amint ő ezt könyvében be is bizonyítja számunkra." Írja könyvének egyik ismertetője.

Roppant erénye írásainak, hogy frappáns példákat talált egy-egy gondolatkör megvilágítására, és nemcsak megértjük gondolatvezetését, hanem önbizalmat is ad. „Ha ez az ember ilyen könnyedén sétál át egyik problémából a másikba, egyik megfogalmazásból akárhány újat, módosítottat, kicsit nehezebbet készít, akkor talán nem is olyan nehéz ez az egész. Megpróbálom én is, biztos megy nekem is." Természetesebbnek érezzük, hogy a rejtvények, fejtörők, találós kérdések készítői is egyszerű, közöttünk élő emberek. A diákok, érdeklődők szemében szűnhet a matematika mítosza. Hátha nemcsak a „kiválasztottak" érthetik meg.

Igazi edzéssel fejleszt ez a könyv. Persze a tanárok felelőssége azért nagy. Kinek ajánljuk a könyvet? Hogyan kell kóstolót adni belőle, nehogy „gyomorrontást" kapjon tőle, akinek kínáljuk?

Nem is hiszem, hogy mindenkinek „együltő helyében" kell elolvasnia a „lovagok és lókötők" történetét. Jobb kézbe venni, letenni, újraolvasni.

Smullyan maga is gondoskodik arról, hogy kívánatos legyen a „tálalásmódja". A vissza-visszatérő fordulatok pedig nem az unalom forrásai, hanem mintegy a „főtéma variációi", amelyek a nyugalom, biztonság érzetével töltenek el mindenkit: „persze, ezt már ismerem, ezt már értem, ezt már magam is megoldottam."

Szinte hihetetlen „olvasóismerettel" oldja fel egy-egy odavetett félmondattal a megértés fáradságát, ad egy kis pihenésnyi időt. A köznapi élet mondatfordulataival az élő beszéd érzetét kelti bennünk.

A megoldások leírásából is sokat tanulhatunk. Kezdő tanárok számára iskolája lehet annak, hogyan lehet „elmagyarázni, megértetni" egy-egy feladat megoldását.

Török Judit, a fordító, ügyes társa volt Smullyannak abban, hogy a szerző célkitűzéseit a magyar nyelvi közegben is elérje. Hiszen a megfelelően játékos, találékony nyelv ebben a könyvben kulcskérdés.

Raymond Smullyan az Egyesült Államokban az Indiana Egyetem filozófia és matematika professzora. Munkáival nemcsak kimondatlanul szellemi követője Lewis Carrolnak, hanem például „Alíz Rejtvényországban" című (reméljük majd magyarul is megjelenő) könyvében el is vállalja ezt a rokonságot.

---

*Dr. Hámori Miklós*

**Tanulás és tanítás számítógéppel**

Ez a kiadvány nem technikai, nem a programnyelv oldaláról, hanem a pedagógia és a pszichológia aspektusából dolgozza fel a témát. A szerző a számítógéppel való tanítás és tanulás didaktikáját alkotta meg. A könyvben mellékletként szerepel néhány BASIC nyelvű program is. (R. sz. 52 983)

TATÁR ISTVÁN
Apáczai-díjas ny. vezető szakfelügyelő,
Makó

# A Feladatok az úttörő-matematikusok vetélkedőin c. könyv megjelenéséhez

Mire ezeket a sorokat olvassák, már kapható lesz a könyvesboltokban könyvem második kötete is, amelyet a Művelődési Minisztérium rendeletére a Tankönyvkiadó Vállalat adott ki. Munkámmal, könyvem megírásával több célom volt.

Egyrészt azt akartam elérni, hogy megörökítsem és hűen megőrizzem egy jelentős kezdeményezés, egy a korábban nemzetközileg is egyedülálló matematikai vetélkedőrendszer történetét és mindazok nevét, akik e nemes szándékú tevékenységben közreműködtek.

Másrészt az volt a célom, hogy olyan feladatcsokrot adjak a kötetekben a kartársak kezébe, amelyet a mindennapos munkájuk során akár a tanulók ismereteinek megerősítésére, akár annak fejlesztésére, a tehetségesebbekkel való foglalkozásra fel tudnak használni. Segíteni kívántam.

Az első kötetben az ott leírt és bemutatott történeti, szervezési, tartalmi és lebonyolítási *eredeti dokumentumok* alapján képet adtam arról, hogy hogyan indult el és hogyan fejlődött hazánkban 1965-től a tehetségkutatást és tehetséggondozást szolgáló országos versenyrendszer. Az ott leírtakból érzékelhető, hogy miként alakult „...a tartalmában és szellemiségében jól átgondolt, pedagógiailag megkomponált, s a gyerekek és pedagógusok érdekeit is érvényesítő, a pályaválasztásban és a továbbtanulásban segítő, ösztönző, az oktatás-nevelés folyamatára kedvezően visszaható forma".*

Az eredeti fényképeim, a megőrzött dokumentumok, jegyzőkönyvek és feladatlapok, a kérésemre hozzám küldött visszaemlékező levelek, az azokból közölt részletek, levéltöredékek, érzelmileg is közelítik majd az olvasót hozzánk, azokhoz, akik annak idején nem kevés fáradozással gondoskodtunk szaktárgyi versenyeink értékeinek biztosításáról.

Érdemes a visszaemlékezéseket, a levéltöredékeket többször is átolvasni, tanítványainkkal átolvastatni! A vallomások, a vélemények, a megvalósult álmok, a beteljesült életcélokról írt — néhány esetben megkapó és megható — sorok biztatást adnak másoknak is!

Könyvem oktatási-nevelési segédeszköz jellege mellett pedagógiatörténeti dokumentum is. Megörökíti, bemutatja, részleteiben is hitelessé teszi két évtized eseményeit és azok hatásait. A versenybizottság tagjainak, a régi döntők győzteseinek és helyezettjeinek hozzám küldött levelei feltárják és igazolják szaktárgyi versenyeink személyiségformáló, embernevelő és pályára irányító hatását. A kötet megörökíti a résztvevő tanulók és felkészítő tanáraik nevét, elismerve ezzel következetes *embernevelő* tevékenységüket. A leírtak mellett táblázatokkal, térképekkel tüntettem fel, hogy az ország melyik községéből, városából, melyik iskolából érkeztek a résztvevők az országos döntőkre. Hangsúlyt kívántam adni ezekkel annak a gondolatnak, hogy az ország legkisebb községeiben is *voltak, vannak* és *lesznek* tehetséges tanulók, lelkes tanárok!

Az általános iskolákban évtizedekre vezethető vissza az a törekvés, amely az egyéni képességek, tehetségek korai felismerését, tervszerű és következetes, tudatos fejlesztését tűzte ki célul. Az 1950-es évek elejétől az országban sok helyen

* Részlet dr. Pék András kandidátus hozzám küldött visszaemlékező leveléből.

rendeztek „jótanulási versenyeket". Ezek általában az iskolai oktató munka, illetve a nevelő tevékenység részeként a tanulmányi eredmények, a tantárgyi átlagok növelését kívánták előmozdítani. Különböző — a tantermi ajtókra kifüggesztett elismerő táblák, tanári asztalokon elhelyezett vándorzászlók és egyéb — jutalmak hirdették egy-egy közösség kollektív eredményeit. Évek múltával egyre többen éreztük, hogy nemcsak egy-egy közösség eredményeiért, hanem a versenyek során feltűnt jó képességű, tehetséges tanulókért, jövőjükért is felelősek vagyunk.

Különösen erősödött ez a felelősségérzet az 1960-as évek elején, amely abban jelentkezett legszembetűnőbben, hogy egyes megyékben helyi, illetve megyei tehetségkutató versenyek megszervezésére is sor került.

Ebben az időben a Magyar Úttörők Szövetsége országos programjában már ott találjuk az iskolai oktató-nevelő munka eredményességét segítő kezdeményezéseket. A kulturális szemlék, a sportrendezvények, az egyre növekvő számú szaktárgyi szakkörök számtalan nevelőt mozgósítottak a tehetségkutatás és tehetséggondozás érdekében. Az egymás után megjelenő szakköri füzetek orientálták a nevelőket a jobb eredmények elérésében, egy komplexebb szemléletmód megvalósításában. Ezzel egyidőben az országos vezető szakfelügyelői tanácskozásainkon és minden lehető alkalommal sürgettem, illetve sürgettük egy országos szaktárgyi verseny megrendezését, a verseny rendszerré alakítását. A Magyar Úttörők Szövetsége akkori főtitkára, Szabó Ferenc, a módszertani csoport vezetője, Pék András a közös ügy felkarolásával — minden hivatalos szervezési és pénzügyi gondot vállalva — a szövetség ügyévé tette a tehetségkutatást és tehetséggondozást és a mozgalmi tevékenységet színesítő kezdeményezésünket. Kérésükre készítettem el az úttörők „Matematikus szakpróba" füzetét*, majd az 1966. év nyarán Csillebércen első ízben szervezett szaktáborban kísérletként az I. Országos Matematikai Szaktárgyi Verseny lebonyolítási tervét, forgatókönyvét, feladat- és eszközanyagait. Az ott tapasztalt siker mindnyájunkra ösztönzőleg hatott.

Az 1966/67. tanévben a Magyar Úttörők Szövetsége, a Művelődésügyi Minisztérium és az Országos Pedagógiai Intézet közreműködésével megkezdődött hazánkban az általános iskolai úttörők országos matematikaversenye. A beindulás gondjainak megoldásában méltó társra találtunk Nyilas Dezső minisztériumi főelőadóban és Pálfy Sándor OPI matematika tanszéki munkatársban. Pálfy Sándor 1979-ben bekövetkezett haláláig példamutató és áldozatkész személyiségével, az új megoldások, kezdeményezések kimunkálásában lelkes társunk volt.

A szaktárgyi versenyrendszer közel két évtizedig szolgálta iskoláinkban a tehetségek korai felismerését, és tehetséges tanulóink tudatos és következetes fejlesztését.

Könyvem — mint ahogy azt a címe is jelzi — ezeknek a versenyeknek a feladatait és azok megoldásait adja közre. Az első kötetben a történeti áttekintés és a már fentebb jelzett tartalom mellett az országos döntők feladatait, a második kötet pedig a városi és járási, valamint a megyei versenyek kitűzött feladatait és azok megoldásait tartalmazza. A két kötet alkot egy *egészet* és ad hű képet a versenyrendszerről, annak tartalmáról, elért céljairól, de tükrözi a matematikai követelmények és tantervi anyagok változásait is. Érzékelhető az is, hogy hogyan alakult a versenybizottságunk igénye a versenyzők egyre nagyobb teljesítményeinek eredményeként. Látható a kötetekben az is, hogy bizonyos elvárások (számolási készség, elemi matematikai ismeretek, geometriai alapisme-

* Matematikus szakpróba. Ifjúsági Lapkiadó V. 1964.

retek stb.) állandósága mellett a feladatok az *újra, a korszerűbb ismeretek megszerzésére is ösztönöztek.*

Tudom, hogy a *ma* tanulói ma már szebb, elegánsabb megoldásokra is képesek. Hiszem, hogy a közreadott kötetek segíthetnek tanulóink önfejlesztésében is. Bizonyos vagyok benne, hogy tanártársaim eredményesen használják majd e gyűjtemény feladatait mindennapos munkájuk során.

Amikor e gondolatokat zárom, öröm tölt el.

Örülök, hogy 20 év feladatlapjait kitartóan és következetesen megőriztem, évenként egymásra raktam. Mindig reménykedtem és bíztam abban, hogy egyszer majd módomban lesz tapasztalatainkat közreadni. Mint a vetélkedőrendszer életrehívóinak egyike, rendületlenül hittem abban, hogy hasznos ügyben tevékenykedünk, még akkor is, amikor néhány nemkívánatos jelenség, szubjektív magatartási hiányosságok akadályozták munkánkat.

Ma is hittel vallom, hogy minden gyermekeket mozgósító tevékenység szervezése fáradságos, nehéz munka. De a versenyeinken részt vett és győztes tanulók boldog mosolya, öröme, a szülők és kartársaink elismerő és jószándékú bíráló megjegyzései, észrevételei az akkori szervezőket és rendezőket, minden közreműködőt a befektetett energiáért kárpótolta!

Az eltelt 20 év jelentős volt abban, hogy a tehetségkutatás és tehetséggondozás országos jelentőségű összefogást eredményezett. A fővárosban és hazánk legkisebb községében is kerestük kis országunk nagy értékeit! Sohasem szabad elfelejtkeznünk arról, hogy minden tehetséges gyermek nemzeti kincsünk egy-egy csiszolatlan ékköve!

Törekedjünk arra, hogy ezek az ékkövek majd briliánsként csillogjanak mindnyájunk örömére!

## FELADATOK

*Rovatvezető:* Pogáts Ferenc

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10. 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

*Beküldési határidő:* a lap kézbesítésétől számított egy hónap.

**1191.** Az $ABCD$ négyzet $AB$ oldalára befelé, $BC$ oldalára kifelé emeljük az $ABP$, illetve $BCR$ szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy $D$, $P$ és $R$ egy egyenesen vannak!

**1192.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x^2-a^2)^2-4ax-1=0$$

egyenletet, ahol $a$ adott valós szám!

**1193.** A $p(x)$ egész együtthatós polinom és $p(1985)=1987$, valamint $p(1988)=$ $=1989$. Mutassuk meg, a $p(x)$ polinomnak nincs egész zérushelye!

*Varga István, Nagyszalonta*

**1194.** Bizonyítsuk be, hogy az $n \geqq 1$ természetes számokra fennáll:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{2}{5}} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

*Sándor József, Farcád*

**1195.** Az $a$ élű szabályos tetraéderben négy egybevágó gömböt elhelyezünk úgy, hogy mindegyik gömb a tetraéder három lapját és a másik három gömböt érinti. Mekkora e gömbök sugara?

*Barabás Sándor, Nyírbátor*

**1196.** Legyen $a_1=1$ és minden $n$ pozitív egészre $a_{n+1}=(n+1)(a_n+1)$. Számítsuk ki a

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$$

szorzatot!

*Róka Sándor, Nyíregyháza*

## Feladatmegoldások (1167—1172.)

**1167.** Az $n$ elemű $H$ halmaz $H_1, H_2, \ldots, H_n$ valódi részhalmazainak bármely kettőjére $H_i \cup H_j = H$ $(i \neq j)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $k \leqq n$.

*Róka Sándor, Nyíregyháza*

*I. megoldás:* Legyen $\bar{H}_i = H \setminus H_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$! E választásra

$$\bar{H}_i \neq \emptyset,$$

mert $H_i$ valódi részhalmaza $H$-nak, továbbá $i \neq j$-re

$$\emptyset = H \setminus H = H \setminus (H_i \cup H_j) = \bar{H}_i \cap \bar{H}_j.$$

Következésképpen az $\bigcup_{i=1}^{k} \bar{H}_i$ $k$ darab nem üres, páronként idegen halmaz egyesítése, és így legalább $k$ elemű halmaz. Ámde

$$\bigcup_{i=1}^{k} \bar{H}_i \subseteq H$$

miatt $k \leqq n$, és ezt kellett igazolnunk.

*Hornung Tamás, Zalaegerszeg*

*II. megoldás:* Mivel $H_1$ valódi részhalmaza $H$-nak, ezért van olyan $h_1$ eleme $H$-nak, mely nincs a $H_1$-ben. Ez a $h_1$ elem azonban az összes többi $H_i$-nek eleme, mert ellenkező esetben a $H_1 \cup H_i = H$ semmilyen $i$-re nem állhat fenn! Ugyanígy láthatjuk be, hogy valamennyi $H_i$ részhalmazból hiányzik legalább egy $h_i$ elem, amely azonban az összes többi ($i$-től különböző indexű) részhalmaznak eleme. Ily módon a részhalmazok száma legfeljebb az elemek száma lehet, azaz $k \leqq n$. A $k=n$ eset megvalósul, ha minden $1 \leqq i \leqq n$-re $h_i \notin H_i$. Ezzel az állítást igazoltuk.

*Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest;*
*Kiss Géza, Kisújszállás*

*A megoldók száma: 25.*

**1168.** Bizonyítsuk be, hogy bármely $n$ természetes és $x$ racionális számra $\{x\}+\{x^2\}+\ldots+\{x^n\} \neq 1$, ahol $\{a\}$ az $a$ valós szám törtrészét jelöli!

*Varga István, Nagyszalonta*

*Megoldás:* $n=0$-ra az állítás értelmetlen, $n=1$-re $\{x\}<1$ miatt igaz. Legyen a továbbiakban $n>1$! Megmutatjuk, hogy ha $x$ racionális, de nem egész, akkor

$$k := x+x^2+\ldots+x^n$$

sem egész. Indirekt okoskodunk: tegyük fel, hogy van olyan $x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, melyre $k$ egész. Legyen erre $x=\frac{r}{s}$, $(r, s)=1$ és $s>1$. Így

$$k = x\frac{x^n-1}{x-1}, \quad \text{vagyis} \quad r(r^n-s^n) = k(r-s)s^n$$

adódik. Ebben egyrészt $s$ osztója lévén a jobb oldalnak, osztója kell legyen a bal oldalnak is, azaz

$$s \mid r(r^n-s^n),$$

viszont $(r, s)=1$ és $s>1$ miatt $s \nmid r(r^n-s^n)$.

A nyert ellentmondás állításunkat igazolja. A feladatbeli állítás igazolására térve, mivel $\{a\}=a-[a]$ (itt $[a]$ az $a$ valós szám egész részét jelöli), azt kell bizonyítsuk, hogy

$$x-[x]+x^2-[x^2]+\ldots+x^n-[x^n] \neq 1,$$

vagy az ebből rendezéssel nyert (az eredetivel ekvivalens)

$$x+x^2+\ldots+x^n \neq 1+[x]+[x^2]+\ldots+[x^n]$$

relációt. Ez pedig az előzőekben bizonyítottak miatt igaz, hiszen a bal oldal nem egész szám, míg a jobb oldal mindig egész.

*Hajna János, Pécs; Kamarás Lajos, Pécs*

*A megoldók száma: 20.*

**1169.** Igazoljuk, hogy bármely háromszögben

$$|m_b-m_a| < \frac{16\sqrt{3}}{9}R,$$

ahol $m_a$, $m_b$ a háromszög két magasságának, $R$ pedig a köré írt kör sugarának hosszát jelöli!

*Sándor József, Farcád*

*Megoldás:* A feladatbeli relációnál élesebbet látunk be:

$$|m_b-m_a| < 2R < \frac{16\sqrt{3}}{9}R.$$

Valóban, mivel a háromszög magassága nem nagyobb a vele közös csúcsra illeszkedő két oldal egyikénél sem, ezek pedig nem nagyobbak a háromszög köré írt kör átmérőjénél, így

$$0 < m_a \leqq 2R \quad \text{és} \quad 0 < m_b \leqq 2R.$$

Ezekből pedig

$$-2R < m_b-m_a < 2R,$$

azaz

$$|m_b-m_a| < 2R.$$

Ez a becslés éles, hiszen a $2R$ átfogójú, $a \leqq b$ befogókkal rendelkező derékszögű háromszögben

$$|m_b-m_a| = |a-b| = b-a = \sqrt{4R^2-a^2}-a,$$

tehát $a$ megfelelő megválasztásával ez a különbség tetszőleges kevéssel fog eltérni a $2R$-től.

*Barabás Sándor, Nyírbátor; Péter Árpád, Sepsiszentgyörgy*

*A megoldók száma: 25.*

**1170.** Legyenek $a$, $b$ és $c$ $\frac{1}{2}$-nél kisebb olyan pozitív számok, amelyek összege 1. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{a(1-2a)}+\sqrt{b(1-2b)} > \sqrt{c(1-2c)}.$$

*Merényi Imre, Börvely*

*I. megoldás:* Először azt mutatjuk meg, ha $u$, $v$ és $w$ pozitívak, és $u+v>w$, akkor $\sqrt{u}+\sqrt{v}>\sqrt{w}$ is igaz.
Mivel

$$u+v > w$$

feltevésünk szerint, ezért

$$u+v+2\sqrt{u}\sqrt{v} > w$$

méginkább fennáll. Ebből

$$(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2 > (\sqrt{w})^2$$

következik, amiből az alapok pozitív volta és a hatványfüggvény monotonitása miatt

$$\sqrt{u}+\sqrt{v} > \sqrt{w}.$$

Ezek szerint a feladatbeli állítás igazolásához elég megmutatnunk:

$$a(1-2a)+b(1-2b) > c(1-2c).$$

Az $a+b+c=1$ feltételt felhasználva előbbi egyenlőtlenségünk

$$a(b+c-a)+b(a+c-b) > c(a+b-c)$$

alakot ölti, amiből rendezéssel és összevonással a

$$c^2 > a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2,$$

azaz

(1) $$c > |a-b|.$$

A feladat állítása tehát ez utóbbi relációval ekvivalens. Az $a$ és $b$ szimmetriája miatt feltehető, hogy $a \geqq b$, tehát

$$c > |a-b| = a-b.$$

Ennélfogva

(2) $$b+c > a,$$

azaz

(3) $$1-a > a,$$

tehát

(4) $$\frac{1}{2} > a,$$

ami viszont teljesül. Ekvivalens átalakításainknak hála (4-)-ből következik (1), és ezt kellett igazolnunk.

*Bagi Gábor, Barcs*

*II. megoldás:* Az előbbi megoldásban láttuk, hogy az $a$, $b$, és $c$ pozitív valós számok kielégítik a háromszög-egyenlőtlenségeket , hiszen

$$b+c = 1-a > a > |b-c|.$$

Van tehát $a$, $b$, $c$ oldalú háromszög. A $b+c=1-a$ egyenlőség négyzetéből és az előbbi háromszög $a$ oldalára vonatkozó koszinusztétel egybevetéséből,

$$1-2a = 2bc+2bc\cos\alpha = 2bc(1+\cos\alpha) = 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Hasonlóan nyerjük:

$$1-2b = 4ac\cos^2\frac{\beta}{2} \quad \text{és} \quad 1-2c = 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Ezeket a feladatbeli relációba téve — egyszerűsítés után — a

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2} > \cos\frac{\gamma}{2}$$

relációt kell igazoljuk.

Ám

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2},$$

hiszen

$$0<\sin\frac{\alpha}{2}<1 \quad \text{és} \quad 0<\sin\frac{\beta}{2}<1.$$

*Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely,*
*Varga István, Nagyszalonta*

*III. megoldás:* Az $f\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ függvényt *háromszögfüggvény*nek nevezzük, ha az értelmezési tartomány minden olyan három (nem feltétlenül különböző) $a$, $b$ és $c$ elemére, amelyekre $a\leqq b+c$, $b\leqq a+c$ és $c\leqq a+b$ mindegyike fennáll, az

$$f(a)\leqq f(b)+f(c),\quad f(b)\leqq f(a)+f(c) \quad \text{és} \quad f(c)\leqq f(a)+f(b)$$

valamennyije is teljesül.

Jelölje $T(\dot{I})$ az $\dot{I}$-n értelmezett háromszögfüggvények halmazát. Feladatunk egy általánosítását fogjuk most igazolni:

Ha $f\colon \dot{I}\to\mathbf{R}$, $f(0)=0$, továbbá $f$ monoton növekedő és konkáv az $\dot{I}$-n, akkor $f\in T(\dot{I})$.

Ugyanis az $f$ konkáv volta miatt, a *Jensen*-egyenlőtlenség szerint, ha $p$ és $q$ pozitív valós számok és $x_1, x_2\in\dot{I}$, akkor

$$f\left(\frac{px_1+qx_2}{p+q}\right)\geqq\frac{p}{p+q}f(x_1)+\frac{q}{p+q}f(x_2).$$

Ha most $p=x$, $q=y$, $x_1=x+y$ és $x_2=0$, akkor

$$f(x)\geqq\frac{x}{x+y}f(x+y),$$

és hasonlóan

$$f(y)\geqq\frac{y}{x+y}f(x+y).$$

Ezeket összegezve

$$f(x)+f(y)\geqq f(x+y)$$

adódik. Így, ha $x=x_1$, $y=x_2$ és $x_1+x_2>x_3$, akkor a monotonitás miatt

$$f(x_1)+f(x_2)>f(x_3),$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Az $x_1=a(1-2a)$, $x_2=b(1-2b)$ és $x_3=c(1-2c)$ választással $x_1+x_2>x_3$ akkor és csak akkor, ha $a+b>c$ (amit korábban már beláttunk), ezért minden monoton növekvő, konkáv $f$ függvény mellett, melyre $f(0)=0$,

$$f(a(1-2a))+f(b(1-2b))>f(x(1-2c)).$$

Az $f\colon \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $x\to\sqrt{x}$ ilyen függvény, tehát a feladatbeli állítás igaz.

*Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely*

**Megjegyzés:** Valamennyi megoldásból kitűnt, hogy mind az $a$, $b$, $c$, mind az $a(1-2a)$, $b(1-2b)$, $c(1-2c)$, mind pedig a $\sqrt{a(1-2a)}$, $\sqrt{b(1-2b)}$, $\sqrt{c(1-2c)}$ számhármasok elemei kielégítik a háromszög-egyenlőtlenségeket, léteznek tehát ilyen hosszúságú oldalakkal rendelkező háromszögek.

*Bagi Gábor, Barcs*

*A megoldók száma: 24.*

**1171.** Bizonyítsuk be, ha a parabola három, tengelyponttól különböző pontjára illeszkedő kör átmegy a parabola tengelypontján, akkor a parabola előbbi három pontbeli normálisa (a pontbeli érintőre merőleges egyenes) egy sugársorhoz tartozik.

*Kárteszi Ferenc, Budapest*

*Megoldás:* Válasszuk meg a koordináta-rendszert és az egységet úgy, hogy az origó a parabola tengelypontja, az $y$ tengely a parabola tengelye, a $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ pont pedig a parabola fókusza legyen. Így a parabola egyenlete $y=x^2$. Ennek $(x_i; x_i^2)$ pontjában húzott érintő meredeksége $2x_i$. Az $x_1, x_2, x_3$ pontbeli normálisok egyenletei tehát rendre

$$x+2x_1y-x_1-2x_1^3 = 0,$$

$$x+2x_2y-x_2-2x_2^3 = 0,$$

$$x+2x_3y-x_3-2x_3^3 = 0.$$

Ezek akkor és csak akkor tartoznak egy sugársorhoz, ha az együtthatókból képzett $D$ determináns nulla, ha tehát

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2x_1 & -x_1-2x_1^3 \\ 1 & 2x_2 & -x_2-2x_2^3 \\ 1 & 2x_3 & -x_3-2x_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Adjuk a középső oszlopot a harmadik oszlop kétszereséhez, majd vonjuk ki az első sort mind a második, mind a harmadik sorból. Így $D$ pontosan akkor 0, ha az

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^3-x_1^3 \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^3-x_1^3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3^3-x_1^3)-(x_3-x_1)(x_2^3-x_1^3) =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3^2+x_3x_1+x_1^2-x_2^2-x_2x_1-x_1^2) =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_1+x_2+x_3) = 0.$$

Különböző $x_1, x_2, x_3$ esetén tehát $D=0$ csakis akkor, ha $x_1+x_2+x_3=0$. Elég tehát bebizonyítani: ha egy origón átmenő kör további három különböző pontban metszi a parabolát, akkor e pontok abszcisszáinak az összege 0. Legyen a kör középpontja $(u; v)$, így egyenlete

$$x^2+y^2-2ux-2vy = 0.$$

A metszéspontok abszcisszáira tehát

$$x^2+x^4-2ux-2vx^2 = 0.$$

Ezt az $x$-ben negyedfokú egyenletet a közös pontok első koordinátái kielégítik, ezért a gyökök és együtthatók közötti összefüggések miatt a négy gyök összege a harmadfokú tag együtthatójának $(-1)$-szerese. Ám $x^3$ együtthatója 0, az egyik gyök is 0, és ezzel a bizonyítandót kaptuk.

*Hornung Tamás, Zalaegerszeg*

*A megoldók száma: 15.*

**1172.** Egy labdarúgó-mérkőzésnek a TOTÓ szempontjából három lehetséges eredménye van (1, $x$, 2). Pici országban a csapatok kis száma miatt a TOTÓ-ban csak 4, Kergengóciában pedig 11 mérkőzés szerepel. Legalább hány tipposzlopot töltsön ki egy picibeli, hogy biztosan legyen 3 találata, és hányat egy kergengóc, ha ő legalább 9 találatra vágyik?

*Megoldás:* Pici országban $3^4$ különbözőképpen kitöltött TOTÓ-szelvény van. Egy adott héten — a telitalálatos szelvényen kívül — azon a 8 szelvényen is legalább 3 találat van, amelyeket a telitalálatos szelvényből úgy kapunk, ha valamelyik tippjét elrontjuk. Megfordítva, egyetlen szelvénnyel 9 különböző eredmény mellett lehet legalább 3 találatunk. Így az összes $3^4$ lehetséges eset lefedéséhez legalább $3^4:3^2=3^2$ szelvényt kell kitöltenünk.

Az alábbi 9 szelvény e célt megvalósítja:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $x$ | $x$ | $x$ | 2 | 2 | 2 |
| 1 | $x$ | 2 | 1 | $x$ | 2 | 1 | $x$ | 2 |
| 2 | 1 | $x$ | 1 | $x$ | 2 | $x$ | 2 | 1 |
| $x$ | 1 | 2 | 2 | $x$ | 1 | 1 | 2 | $x$ |

Kergengóciában $3^{11}$ különböző kitöltés van, és egy adott szelvénnyel

$$1+\binom{11}{1}\cdot 2+\binom{11}{2}\cdot 2^2 = 3^5$$

különböző esetben lehet legalább 9 találatunk. Egy esetben ugyanis 11 találatunk van, huszonkét esetben csak egy eredményt nem találtunk el, amikor is a 11 sor valamelyikében tippünktől eltérő két másik lehetséges eredmény valamelyike következett be. Amikor 9 találatunk van, a két el nem talált eredmény közül az első sorát 11-féleképpen, a másodikét 10-féleképpen választhatjuk meg. Így azonban minden sorpárt kétszer kaptunk meg, a különböző esetek száma tehát csak $\frac{11\cdot 10}{2}=\binom{11}{2}$. Minden sorpár mellett a mienktől eltérő eredmény $2\cdot 2$-féleképpen választható meg, így a lehetőségek számára valóban azt kapjuk, amit állítottunk.

Mivel egy szelvénnyel $3^5$ különböző esetben lehet legalább 9 találatunk, az összes eset lefogásához legalább $3^{11}:3^5=3^6$ szelvényt kell kitöltenünk.

Adunk példát a kergengóc szelvénytöltögetésre is, noha ilyent a feladat követelménye nem támasztott. Előbbi táblázatunk úgy készült, hogy benne az első két sor tetszőleges, a harmadik sor ezek összege, ha képzeletben $x$ helyébe 0-t írunk, és a 3-nál nagyobb eredményt 3-mal csökkentjük. A negyedik sor pedig az első kettő különbsége, csak most a negatív eredményt 3-mal növeltük. Ennek mintájára a $3^6$ kergengóc szelvény is kitölthető! Most az első hat sor tetszőleges, és $t_i$ jelöli az $i$-edik tippet, akkor ismét modulo 3 véve az összegeket

$$\begin{aligned}
t_7 &= \phantom{t_1}\ t_2+t_3-t_4-t_5+t_6\\
t_8 &= t_1\ -t_3+t_4-t_5+t_6\\
t_9 &= t_1-t_2\ -t_4+t_5+t_6\\
t_{10} &= -t_1+t_2-t_3\ +t_5+t_6\\
t_{11} &= -t_1-t_2+t_3+t_4\ +t_6
\end{aligned}$$

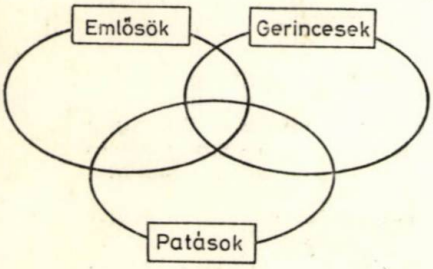
alkalmas kitöltést ad.

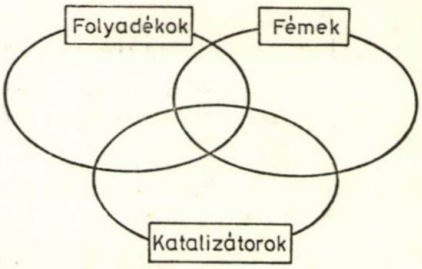
## A megoldók névsora (1167—1172.)

Bagi Barnabás, Barcs (1167.); Bagi Gábor, Barcs (1168—1171.); Barabás Sándor, Nyírbátor (1167. 3 mód, 1168—1171.); Bege Antal, Csíkszereda (1167—1170.); Bencze Mihály, Brassó (1168—1170.); Bíró Bálint, Eger (1169., 1170.); Boda Miklós, Pécs (1167., 1169—1171.); Csepreginé Ambrus Gabriella, Budapest (1167., 1169.); Dályay Pál, Marosvásárhely (1167—1171.); Hajna János, Pécs (1167—1171.); Hornung Tamás, Zalaegerszeg (1167—1171.); Horváth Géza, Zselíz, (1169.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (1167., 1169—1171.); Kamarás Lajos, Pécs (1167—1171.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (1169.); Kiss Géza, Kisújszállás (1167—1171.); Kosztolányi József, Szeged (1167., 1168., 1170.); Kovács Gabriella, Nagybánya (1167—1171.); ifj. Kováts Péter, Kaposvár (1167., 1169.); Dr. Marosvári Péter, Budapest (1167—1170.); Mészáros József, Galánta (1167—1170.); Péter Árpád, Sepsiszentgyörgy (1167., 1168., 1169. 3 mód, 1170., 1171.); Sándor József, Farcád (1168—1171.); Simon József, Csíkszereda (1167., 1168., 1171.); Steierlein István, Balatonfüred (1167., 1169.); Tóth Géza, Cegléd (1169., 1170.); Tóth György, Szolnok (1170.); Tóth László, Szatmár (1167., 1168.); Tóth Sándor, Sárospatak (1167—1171.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (1167—1169., 1170. 4 mód, 1171.); Varga István, Nagyszalonta (1167—1169., 1170. 2 mód).

# A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata




1988. XXXV. évfolyam 6 szám

# A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1971 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200

88-3710 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS

A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 42,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 7,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
*a)* személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését (nyugdíjasok törzsszámukat), *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

## TARTALOM

*Takács Gáborné—Takács Gábor:* Néhány konkrét példa a tantárgyon kívüli koncentráció alkalmazására a felső tagozaton ..... 161
*Róka Sándor:* Miért nem lehet? Feladatok szakköre. III. ..... 167
*Dr. Hajnal Imre:* A tanári munka és a tankönyv (részlet egy készülő tanári segédkönyvből) ..... 171
*Dr. Hack Frigyes:* Javaslat írásbeli dolgozatok értékelésére ..... 175
*Dr. Rédling Elemér:* Felmérések a logikai fogalmak témaköréből ..... 178
*Bagi Gábor:* Az 1144. feladatról ..... 180
ÖTLETSAROK ..... 181
*Radnainé Szendrei Julianna:* Paraméter ... 181
*Gódorné Sergyán Stefánia:* Lényeges a szóbeliség ..... 185
*Barta László:* Néhány gondolat a számítógépes grafikáról ..... 191

## INHATLVERZEICHNIS

*Takács Gáborné—Takács Gábor:* Einige konkrete Beispiele für die Anwendung der außerfächlichen Konzentration in der Oberstufe der Grundschule ..... 161
*Róka Sándor:* Warum ist er nicht möglich? Aufgaben für die Fachzirkel. III. ..... 167
*Dr. Hajnal Imre:* Die Arbeit des Lehrers und die Lehrbücher (Fragment aus einem bald herauskommenden Lehrerhandbuch) 171
*Dr. Hack Frigyes:* Ein Vorschlag zur Auswertung der schriftlichen Arbeiten .... 175
*Dr. Rédling Elemér:* Diagnostischer Test aus dem Themenkreis der logischen Begriffe ..... 178
*Bagi Gábor:* Über die Aufgabe Nr. 1144 180
IDEENECKE (IDEENBÖRSE) ..... 181
*Radnainé Szendrei Julianna:* Der Parameter 181
*Gódorné Sergyán Stefánia:* Die entwicklung der mündlichen Fertigkeiten ist wesentlich ..... 185
*Barta László:* Einige Gedanken über die Computer-Graphik ..... 191

## СОДЕРЖАНИЕ

*Такач Габорне—Такач Габор:* Некоторые конкретные примеры связи учебного материала по математике с др. науками в старших классах ..... 161
*Рока Шандор:* «Почему невозможно?» Задачи для кружков. III. ..... 167
*Д-р Хайнал Имре:* Творчество учителя и учебник (отрывок из пособия для учителя, которое скоро выйдет из печати) ..... 171
*Д-р Хак Фридеш:* Предложение по оценке письменных работ ..... 175
*Д-р Редлинг Элемэр:* Способность логического мышления ..... 178
*Баги Габор:* О задаче № 1144 ..... 180
УГОЛОК ИДЕЙ ..... 181
*Раднаине Сендреи Юлианна:* О параметрах ..... 181
*Тодорне Шердан Штефания:* Важность устной работы учеников ..... 185
*Барта Ласло:* Несколько слов о графике на ЭВМ ..... 191

TAKÁCS GÁBOR — TAKÁCS GÁBORNÉ
igazgató tanár
Gelléri Andor Endre IV. Ker. Szigeti József utcai
Általános Iskola, Általános Iskola, Budapest
Budapest

# Néhány konkrét példa a tantárgyon kívüli koncentráció alkalmazására a felső tagozaton

Különböző gyakorlati problémák megoldásához többféle irányban is könnyen továbbfejleszthető ismeretek, képességek, készségek alkalmazása tanítványaink későbbi életében legtöbbször nem elszigetelt szaktárgyi vonatkozásban merül fel. Közoktatás-politikai célkitűzéseink között is a tanulói személyiség sokoldalú, komplex fejlesztése található. Az iskolákban tanított ismeretek zöme, azonban a tantárgyankénti csoportosítás rendszere következtében nagyrészt napjaink tudományrendszerét tükrözi. A tantárgyak ismeretanyaga kevés kivételtől eltekintve egy-egy tudományág tárgykörének szűkített változata. Ezért alakult ki az a helyzet, hogy a tanárok és a tanulók többsége egyaránt külön-külön tantárgyakban gondolkodik és még a középfokú (esetleg felsőfokú) képzés végén sem szintetizálódnak a természettudományos ismeretek és összefüggések [1]. Ezen a kedvezőtlen helyzeten „integrált, komplex tantárgyak koncepciójának kidolgozása" [2], bevezetése mellett a tantervi koordináció elmélyítésével, a tantárgyon kívüli koncentráció propagálásával is javíthatunk.

Az 1978-as általános iskolai matematika-tanterv koncepciójáról a szakmai irányítás és a tantárgyat tanító pedagógusok többsége részéről „egyetértés alakult ki a tanterv szerkezete, felépítése tekintetében ... a tantervi témák összeszövése, egymással és más tárgyakkal való kapcsolataik kialakítása" [3] vonatkozásában. Hiszen „ha megtaláljuk a kapcsolódási lehetőségeket, akkor különösebb erőltetés nélkül fejleszthetjük a gyerekeket egy-egy órán sok témában is. Az pedig alsó szinten különösen fontos, hogy a gyerek számára ne daraboljuk témákra a matematikát (sőt igazán jó lenne, ha tárgyakra sem szeletelnénk a megismerni vágyott világot)" [4].

Az alapfokú matematika — most már egy évtizede — új szemléletű tanítási és tanulási módszereinek elterjedésével bővültek a tantárgyi koncentráció lehetőségei. Az általános iskolai matematika anyagába bekerült újszerű témakörök szemléletformáló hatása jobban érvényesül, ha tantárgyi koncentrációval kötjük össze feldolgozásukat. Ezeknek a témaköröknek (halmazok, logika-relációk, függvények, sorozatok-kombinatorika, valószínűség, statisztika) feladatanyagát alkalmasan válogatva sok koncentrációs lehetőség adódik, amelyeket az eredményes tanítás érdekében indokolt kihasználnunk. Az ismeretanyag ilyetén való kezelése összhangban van azzal a tantervi koncepcióval, hogy a matematika tananyagát, a feldolgozásra kijelölt témák anyagát egymással kölcsönhatásban, a témarészek összekapcsolásának lehetőségeit kihasználva kell feldolgozni. Például a halmazok—logika „témakört nem külön tanítjuk, nem elszigetelten, hanem a többi témakörbe beépítve. Példaanyaga kiterjed a teljes általános iskolai matematikára, segít az összeszövésben, az egységesebb matematikai szemlélet alakításában" [5]. Vagy gondoljunk arra, hogy kombinatorikai feladatainknak a matematika más témakö-

reivel kapcsolatos ismereteket is célszerű tartalmaznia. Ez az egyes témaköröknek egymással kölcsönhatásban történő feldolgozására vonatkozó módszertani elvárás teljesítésén túl azzal is összefügg, hogy tanítványainknak így biztosíthatjuk a lehetőséget olyan konkrét módszerek és sémák felismerésére, amelyek a matematika többi témakörének anyagában lehetővé teszik az adott feltételeknek megfelelő összes megoldás rendszeres megkeresését. Így tartalommal telik meg tanítványaink szemléletformálásával kapcsolatos azon szándékunk, hogy tudatosítsuk: a matematika minden területén léteznek olyan feladatok, amelyeknek többféle, egyaránt helyes megoldása van.

Természetesen a koncentráció lehetőségét nem csak a matematika tananyagán belül szükséges keresnünk-alkalmaznunk, hanem más tantárgyak vonatkozásában is. Sőt olyan ismeretekkel kapcsolatban is, amelyek esetleg egyetlen iskolai tantárgy anyagához sem tartoznak. Gondolunk például olyan gyakorlati feladatokra, amelyek a matematikai ismereteken kívül még a mindennapi életvitelhez is kapcsolhatók.

Más tantárgyakat tanító kollégáink munkáját segíthetjük azzal, hogy biológiai, fizikai, földrajzi, kémiai, környezetismereti, közlekedési, nyelvtani stb. ismereteket tartalmazó feladatokat is megoldatunk. Ha a feldolgozott ismeretanyag más tantárgy anyagában is szerepel, azzal a kölcsönös erősítésen, kiegészítésen túl, nyilván az oktatás (nevelés) végső céljának elérését is szolgálhatjuk.

A tantárgyon kívüli koncentráció alkalmazása az önálló ismeretszerzésre történő felkészítésnek is alkalmas eszköze. Ilyen feladatok megoldatásával is segíthetjük a matematika tanításának azt a célját, hogy ismeretlen, szokatlan típusú feladatok megoldásához is hozzá tudjanak kezdeni tanítványaink és önállóan, vagy több-kevesebb segítséggel meg is tudják oldani az ilyen feladatokat. Hiszen kétes értékű az olyan képességfejlesztés, ami csupán egy-egy feladattípus megoldásának felkészítésére korlátozódik, hasonló feladatok rendkívül nagyszámú megoldatásán alapszik.

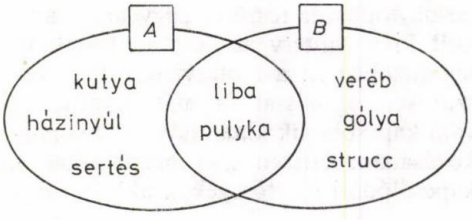
Azon meggyőződésünk miatt, hogy a gyakorló pedagógus az elméleti fejtegetéseknél gyakran használhatóbbnak tartja a konkrét feladatokat: tanítási gyakorlatunk néhány bevált feladatát is közreadjuk.

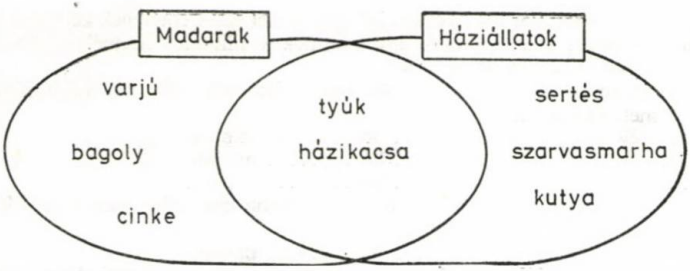
**1.** Halmazok megadása (földrajz, kémia, környezetismeret, közlekedési ismeretek).
Add meg a következő halmazokat az elemek felsorolása nélkül!

$N$ = {délelőtt; délután; éjszaka; este; hajnalban},
$N$ = {.....};
$G$ = {hélium; neon; argon; kripton; xenon; radon};
$G$ = {.....};
$H$ = {Eger; Gyöngyös; Hatvan; Heves},
$H$ = {.....};
$B$ = {Mars; Jupiter; Saturnus; Uranus; Neptunus; Pluto},
$B$ = {.....};
$S$ = {fogaskerekű; földalatti; HÉV; metró; sikló; villamos},
$S$ = {.....}.

**2.** Halmazok kapcsolata (biológia, környezetismeret).
*a)* Milyen állatok találhatók az $A$, a $B$ halmazokban? Milyenek a közös részükben?

$A$: .....
$B$: .....
$A$ és $B$ közös része: .....

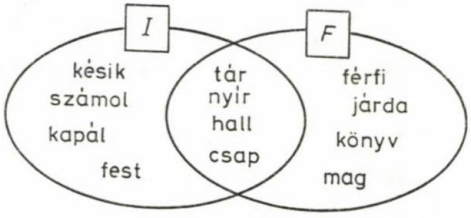




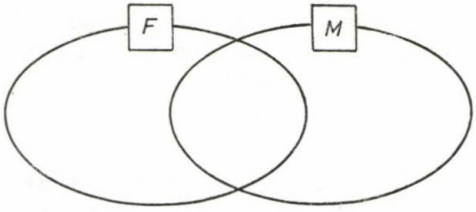

*b)* A rajzon az állatok két halmazát látod.
Jegyezd le az állatok nevének kezdőbetűjét,
— amelyek madarak, de nem háziállatok: .....
— amelyek háziállatok, de nem madarak: .....
— amelyek madarak és háziállatok: .....

**3.** Halmazok metszete (magyar nyelv).

*a)* Milyen szófajok találhatók az *I*, az *F* halmazokban, milyenek a közös részükben?
*I*: .....
*F*: .....
*I* és *F* közös része: .....




*b)* Írd be a következő halmazokban levő szavak kezdőbetűjét a halmazábra megfelelő részébe!
*F* = {acél; bab; kalapos; lábas; oszlop; ravasz; sikló; túró},
*M* = {derűs; erős; kalapos; lábas; piros; ravasz; sikló; tilos}.




**4.** Halmazok kapcsolatai (biológia, kémia). (Lásd az ábrát a borítón!)
Vonalkázd be a halmazábrákon azokat a részeket, amelyekbe semmi sem kerülhet!

**5.** Időtartam-számítások (földrajz, mindennapi életvitel).
Budapesten, 1987 néhány napján a Nap keltének és nyugtának időpontja a következő volt:
március 21-én: $5^{47}$, $17^{57}$,
június 21-én: $3^{47}$, $19^{45}$,
szeptember 23-án: $5^{31}$, $17^{43}$,
december 21-én: $7^{29}$, $15^{55}$.
Számítsd ki, hogy ezeken a napokon mekkora volt a nappalok időtartama!

**6.** Naptár használata (környezetismeret, történelem).
Milyen napra esett szeptember elseje abban az évben, amikor augusztus 20-án csütörtök volt?
Augusztus 20-án csütörtök,
augusztus 27-én .....,
augusztus 28-án .....,
augusztus .....-én .....,
augusztus .....-án .....,
augusztus 31-én .....,
szeptember elsején ....., volt.

**7.** Legalább — legfeljebb — időpont, időtartam (közlekedési ismeretek, mindennapi életvitel).

*a)* Mit állíthatunk az 1980-ban született gyerekek életkoráról?
Már mindegyikük több mint (elmúlt) ..... éves.
Még egyikük sincs ..... éves.
Vannak közöttük olyanok, akik még nincsenek, de olyanok is, akik már elmúltak ..... évesek.

*b)* Gépjárművel, mezőgazdasági vontatóval vagy lassú járművel legfeljebb a jármű hatósági engedélyében feltüntetett számú személyt szabad szállítani. A szállítandó személyek szá-

mának meghatározásakor két 10 éven aluli gyermeket egy személynek kell tekinteni. A motorkerékpár pótülésén azonban csak egy gyermek szállítható. Személygépkocsi első ülésén 6 éven aluli gyermeket szállítani tilos.

Írjál olyan dátumot, amikor azok a gyerekek születhettek, akik már több mint 6 évesek, de még nincsenek 10 évesek!

19..... év ..... hó ..... napján.
19..... év ..... hó ..... napján.
19..... év ..... hó ..... napján.

Mikor születtek azok a gyerekek, akik a mai napon már több mint 6 évesek, de az ilyen korú gyerekek közül a legfiatalabbak?

19..... év ..... hó ..... napján.

Mikor születtek azok a gyerekek, akik a mai napon még nincsenek 10 évesek, de az ilyen korú gyerekek közül a legidősebbek?

19..... év ..... hó ..... napján.

**8.** Időpontok meghatározása (környezetismeret, mindennapi életvitel).

*a)* A könyvtár olvasóterme nyitva van:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Hétfő: | 10—20 h | Péntek: | 13—18 h |
| Kedd: | 10—20 h | Szombat: | 13—18 h |
| Szerda: | 10—14 h | Vasárnap: | 9—13 h |
| Csütörtök: | 10—20 h | | |

Döntsd el, hogy a következő időpontokban nyitva van-e az olvasóterem!

Csütörtökön délután fél öt előtt tíz perccel: .....

Hétfőn délelőtt háromnegyed tízkor: .....

Kedden este negyed nyolckor: .....

Pénteken délben: .....

Szerdán délután háromnegyed négykor: .....

*b)* Hol és mikor pecsételték le (adták fel?) azt a levelet, amelyen ez a keletbélyegző-lenyomat látható?

..... város ..... számú felvevőhivatalában, ..... év
..... havának ..... napján délután ..... órakor.

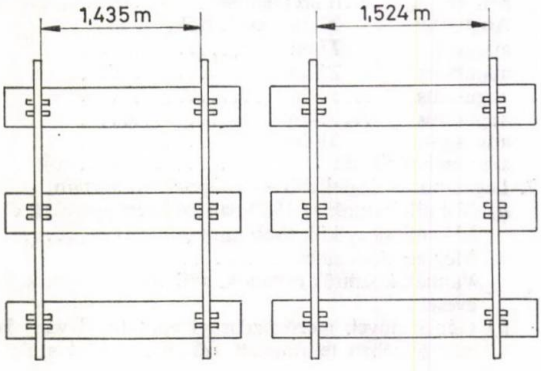
*c)* A posta felvevőhivatalaiban és kezelőhivatalaiban a keletbélyegzőket mindig egész órakor állítják át.
Hol és mikor adták fel azt a levelet, amely ajánlott küldeményként érkezett, amelynek bélyegén ez a keletbélyegző-lenyomat látható?

..... város ..... számú felvevőhivatalában, ..... év
..... havának ..... napján ..... óra után és.....
óra előtt adták fel.

Ha közönséges levél küldeményen ez a keletbélyegző-lenyomat látható, akkor a levél feladásának időpontjáról csak annyit állíthatunk, hogy
..... év ..... havának
..... napján ..... óra
..... történt.

**9.** Alapműveletek gyakorlása (biológia, technika).

*a)* Percenként átlagosan 18-szor veszünk lélegzetet.
Hány lélegzetet veszünk déltől éjfélig?



*b)* Naponta fél millimétert nő a hajunk.
Szökőévben mennyit nő egy ember haja?

*c)* A vasúti sínek távolsága a Szovjetunióban 1,524 m, Magyarországon 1,453 m.
Mennyi a különbség a két sínpár távolsága között?
Fejezd ki a különbséget milliméterekben!

**10.** Pénzhasználat gyakorlása (mindennapi életvitel).

*a)* Ezerforintossal fizeted ki az 590 Ft-ba kerülő képet. A pénztáros hat ötvenforintost és öt húszforintost ad vissza.
Mit kell csinálnod?

*b)* Ötszázassal fizeted ki a 222 forint értékű árut. A pénztárosnő két százforintost, egy ötvenforintost és három tízforintost ad vissza.
Mit kell csinálnod?

**11.** A személyi szám értelmezése (mindennapi életvitel).
Igyekvő Irénnek, aki 1949. május 21-én született a személyi száma: 2 490521 3454
Vállalkozó Vilmosnak, aki 1947. november 6-án született a személyi száma: 1 471106 0186
Ugyanis:

| Név | nem | év | hó | nap | azonosító szám |
|---|---|---|---|---|---|
| Igyekvő Irén | 2 | 49 | 05 | 21 | 3454 |
| Vállakozó Vilmos | 1 | 47 | 11 | 06 | 0186 |

*a)* Kedves Kata személyi száma: 2 791021 1278
Mikor született? ..... év ..... hó ..... napján.

*b)* Hogyan hívhatják (fiú vagy lány?) azt a gyereket, akinek a személyi száma: 1 810415 0710
.....
Mikor született? ..... év ..... hó ..... napján.

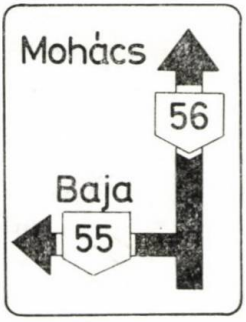
**12.** Pontos adat, közelítő érték (fizika, kémia).
Különböző mérésekre vonatkozó feljegyzésekből valók a következő adatok:

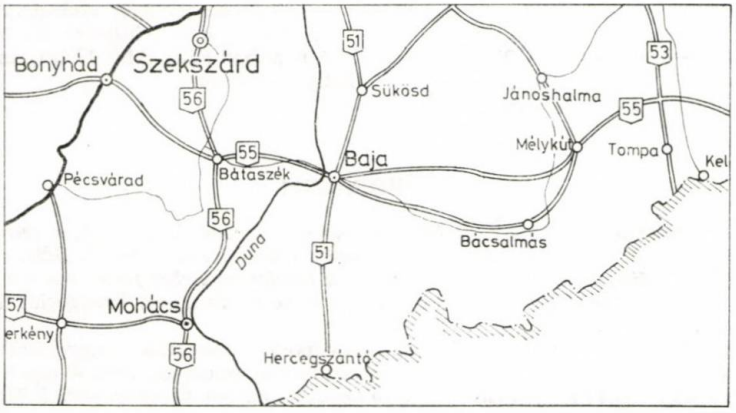
$$m_{Al} = 17{,}43 \text{ kg}, \quad m_{Fe} = 17{,}430 \text{ kg}.$$

Biztos, hogy $m_{Al} = m_{Fe}$? ....., mert .....
Lehetséges-e, hogy $m_{Al} < m_{Fe}$ ..... mert .....
Lehet-e 5 grammnál nagyobb különbség a szóban forgó alumínium és vas tömege között? ....., mert .....
.....

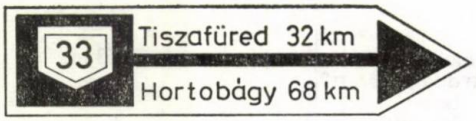
**13.** Térképvázlatok, piktogramok használata (földrajz, közlekedési ismeretek, mindennapi életvitel).

*a)* Hányas számú úton haladunk, ha ezt az útirányjelző táblát látjuk? .....
Hogyan haladjunk át a kereszteződésen, ha Mohácsra igyekszünk? .....
Jelöld be a térképvázlaton azt a helyet, ahol szerinted ez a jelzőtábla található!

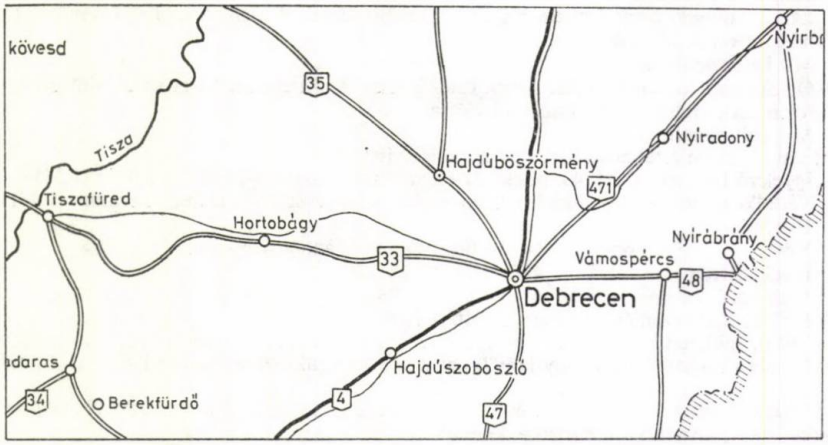



*b)* Melyik helység van távolabb innen, ha azon az úton megyünk, amelyet ez az útirányjelző tábla jelez? .....




Mégpedig: ..... km-rel.

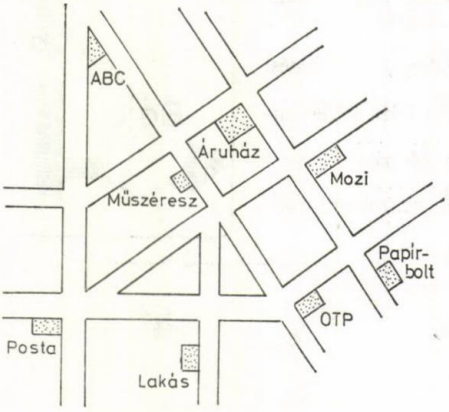



Jelöld be a térképvázlaton azt a helyet, ahol szerinted ez a jelzőtábla található!

**14.** Térképvázlat használata — folyamatok tervezése (földrajz, mindennapi életvitel).

Milyen sorrendben intéznéd el a következő megbízásokat, ha a térképvázlatnak megfelelő városban laknál, és délután háromnegyed háromkor indulhatsz el otthonról?

Gyalog kell menned. Egy úttal kell mind az öt dolgot elintézni, közben hazamenni nem lehet. Útvonaladat úgy tervezd meg, hogy ne legyen felesleges része, mindenhova idejében érkezzél és takarékoskodj az erőddel (csomag, porszívó)!




A megbízások:

— Csomagot kell a postára vinni, de a csomag nehéz, több mint tíz kg.
— Mozijegyet kell estére vásárolni, de csak fél ötkor nyit ki a mozi pénztára.
— El kell hoznod a porszívót a műszerésztől, aki $17^{30}$-ig tartja nyitva a műhelyét.
— Az OTP-nél pénzt kell befizetned az átutalás számlára, de csak 16 óráig van nyitva a pénztár.
— Papírzsebkendőt kell vásárolnod, de nem tudod, hogy melyik üzletben sikerül majd kapni.

A papírbolt és az ABC 17 h-ig, az áruház este hatig van nyitva.

## IRODALOM

[1] FAZEKAS GYÖRGY: *Diákok és biológiatanárok véleménye a gimnáziumi természettudományos tantárgyakról és a matematikáról.* Köznevelés, 1987. 20. szám 15—21. oldal.

[2] *A Művelődési Minisztérium pályázati felhívása az iskolarendszerben folyó nevelés-oktatás tartalmának, tevékenységrendszerének, taneszközeinek a korszerűsítésére.* Pedagógiai Szemle, 1988. 4. szám 372—373. old.

[3] C. NEMÉNYI ESZTER: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 1—4. osztály.* Első rész. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1986. 4. oldal.

[4] C. NEMÉNYI ESZTER: *Teendőink az alsó tagozatos matematikatanításban.* Köznevelés, 1983. 20. szám 21. oldal.

[5] NOVÁK LÁSZLÓNÉ: *Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 5—8. osztály.* Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1987. 5. oldal.

[6] TAKÁCS GÁBOR: *Tantárgyon kívüli koncentráció a matematika új szemléletű tanításakor.* Módszertani Közlemények, 1985. 2. szám. 117—123. oldal.
[7] TAKÁCS GÁBOR—TAKÁCS GÁBORNÉ: *Néhány lehetőség tantárgyi koncentráció alkalmazására az alapfokú matematika tanításában.* Budapesti Nevelő, 1988. 1. szám 77—83. oldal.

RÓKA SÁNDOR
főiskolai tanársegéd
Bessenyei György Tanárképző Főiskola, Nyíregyháza

# Miért nem lehet? Feladatok szakköre. III.

Mottó:
„Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni. A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége: tulajdonképpen a problémamegoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység."

*Pólya György*

A következő feladatok közt vannak régebbi versenyfeladatok, s többségük ilyen nehézségű. Megoldási ötletük, módszerük megismerése része lehet a diákok versenyre való felkészítésének. A feladatok feldolgozása talán az iskolai feladatmegoldó pontversenyben a leghatékonyabb.

## Feladatok

**1.** Miért nem lehet egy természetes szám számjegyeinek szorzata 111?

**2.** Miért nem lehet megoldani a valós számok körében a $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}=x-4$ egyenletet?

**3.** Miért nem lehet olyan háromszöget megadni, melynek minden magassága legalább 2 egység, s területe legfeljebb 1 területegység?

**4.** Miért nem lehet egy konvex sokszöget véges sok konkáv négyszögre feldarabolni?

**5.** Miért nem lehet a négyzetrácsos papíron 5 rácspontot úgy kiválasztani, hogy a pontpárokat összekötő szakaszok ne tartalmazzanak további rácspontot?

**6.** Miért nem lehet olyan 7 oldalú húrsokszöget megadni, melynek szögei rendre 140°, 120°, 130°, 120°, 130°, 110°, 150°?

**7.** Miért nem lehet valamely $\overline{abcd}$ négyjegyű számra igaz az $\overline{abcd}-\overline{dcba}=1008$ egyenlőség?

**8.** Miért nem lehet a $10^{100}+5\cdot 10^{50}+1$ szám köbszám?

**9.** Miért nem lehet $3^{100}+1$ két egymást követő egész szám szorzata?

**10.** Miért nem lehet $100!+4$ két egymást követő egész szám szorzata?

**11.** Miért nem lehet $n^2+n+2$ többszöröse a 15-nek?

**12.** Miért nem lehet $3^n+1$ többszöröse a $2^n$-nek?

**13.** Miért nem lehet $3^n-1$ négyzetszám?

**14.** Miért nem lehet az 1, 2, 3, ..., 1988 számokat csoportokba osztani úgy, hogy minden egyes csoportban a számok szorzata négyzetszám legyen?

**15.** Miért nem lehet az 1, 2, 3, ..., 33 számokat 11 három számból álló csoportba úgy beosztani, hogy minden egyes csoportban a két kisebb szám összege a harmadik legyen?

**16.** Miért nem lehet valamely $n$-re $n!=198800\ldots0$?

**17.** Miért nem lehet egy prímszám néhány egymást követő páratlan szám összege?

**18.** Miért nem lehet $2^{100}$ néhány egymást követő egész szám összege?

**19.** Miért nem lehet az $ax^2+bx+c=0$ ($a$, $b$, $c$ egész számok) egyenlet diszkriminánsa 23?

**20.** Miért nem lehet a $\cos\sqrt{x}$ függvény periodikus?

**21.** Miért nincs olyan $h(x)$ függvény, amelyre minden $x$ esetén teljesülne a $h(f(x))+h(g(x))=g(f(x))$ egyenlőség, ahol $f(x)=x^2+x+2$ és $g(x)=x^2-x+2$?

**22.** Miért nincs olyan $f(x)$ és $g(x)$ függvény, amelyekre bármely $x$, $y$ mellett teljesülne az $x^2\cdot y^2+1=f(x)\cdot g(y)$ egyenlőség?

**23.** Miért nem lehet az $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$ függvényt előállítani két legalább elsőfokú egész együtthatós polinom szorzataként ($a_i$-k egészek)?

**24.** Miért nem vehet fel egy egész együtthatós polinom három egész számra értékként 2-t, s valamely más egész számra értékként 3-at?

**25.** Miért nem lehet valamely egész együtthatós polinomnak négy egész gyöke, s emellett valamely egész $x$ számra a polinom értéke egyenlő 7-tel?

**26.** Miért nem lehet egész számokban megoldani a $19\cdot x^3-84\cdot y^2=1984$ egyenletet?

**27.** Miért nincs olyan $f(x)$ polinom, amely bármely $x$-re kielégítené az $x\cdot f(x-1)=(x+1)\cdot f(x)$ egyenlőséget?

**28.** Miért nem lehet három olyan pozitív $a$, $b$, $c$ számot találni, amelyek kielégítenék az $a\cdot(1-b)>\frac{1}{4}$, $b\cdot(1-c)>\frac{1}{4}$, $c\cdot(1-a)>\frac{1}{4}$ egyenlőtlenségeket?

**29.** Miért nem lehet olyan $x$, $y$, $z$ számokat találni, amelyekre teljesülnének az $|x|<|y-z|$, $|y|<|z-x|$, $|z|<|y-x|$ egyenlőtlenségek?

**30.** Miért nincs olyan mértani sorozat, amelynek elemei közt lenne az 1, 2 és 3?

**31.** Miért nem lehet az $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ végtelen sok tagból álló összeg értéke racionális szám?

**32.** Miért nem lehet a 0,123 456... (a tizedesvessző után egymás után írjuk a természetes számokat) szám racionális?

**33.** Miért nem lehet a 0,235 711 13... (a tizedesvessző után egymás után írjuk a prímszámokat) szám racionális?

**34.** Miért nem lehet a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2^n}}$ összeg értéke racionális szám?

**35.** Miért nem lehet a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}$ összeg értéke racionális szám?

**36.** Miért nem lehet megadni 50 számot úgy, hogy közüle bármely 17 egymást követő szám összege pozitív, s bármely 10 egymást követő összege negatív legyen?

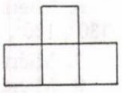
**37.** Miért nem lehet egy kör területén úgy elhelyezni a 0, 1, 2, ..., 9 számokat, hogy bármely két szomszédos szám különbsége 3, 4 vagy 5 legyen?

**38.** Miért nem lehet egy $5\times5$-ös táblázatot az 1 és $-1$ számokkal úgy kitölteni, hogy minden sorban és minden oszlopban különböző legyen a számok összege?

**39.** Miért nem lehet egy $8\times8$-as táblázat mezőibe az 1, 2, 3, ..., 64 számokat úgy beírni, hogy bármely két szomszédos mezőben (ezeknek van közös csúcsuk) álló szám különbségének abszolútértéke legfeljebb 8 legyen?

**40.** Miért nem lehet egy $25\times25$-ös táblázatot az 1, és $-1$ számokkal úgy kitölteni, hogy a sorokban és az oszlopokban levő számok szorzatainak összege 0 legyen?

**41.** Miért nem lehet egy $11\times11$-es táblázat minden sorába beírni az 1, 2, 3, ..., 11 számokat úgy, hogy a táblázat szimmetrikus legyen a főátlóra és a főátlóban legyen két egyforma szám?

**42.** Miért nem lehet egy $10\times10$-es sakktáblát hézagmentesen és átfedés nélkül lefedni  alakú idomokkal?

**43.** Miért nem lehet egy $8\times8$-as sakktábla minden mezőjét ütés alatt tartani 7 bástyával?

**44.** Miért nem lehet egy $8\times8$-as sakktábla bal alsó sarkából eljuttatni egy huszár figurát a jobb felső sarokba úgy, hogy mire odaér, addig a sakktábla minden egyes mezőjét pontosan egyszer érinti?

**45.** Miért nem lehet a $8\times8$-as sakktáblát hézagmentesen és átfedés nélkül lefedni $1\times2$-es dominókkal, ha hiányzik a sakktábla bal alsó és jobb felső mezője?

**46.** Miért nem lehet a $6\times6$-os sakktáblát $1\times2$-es dominókkal hézagmentesen és átfedés nélkül úgy lefedni, hogy a tábla minden egyes függőleges, illetve vízszintes vonalát valamelyik dominó keresztezze?

**47.** Miért nem lehet a $8\times8$-as sakktábla bal alsó $3\times3$-as sarkában álló 9 dámafigurát a jobb felső $3\times3$-as sarokba eljuttatni a következő lépésszabály szerint: egy figura egy másikat vízszintes vagy függőleges irányban átugorva léphet üres mezőre?

**48.** A $8\times8$-as sakktábla jobb felső sarkában levő mezőt elhagyjuk. Miért nem lehet az így megmaradt 63 mezőt $3\times1$-es dominókkal (hézagmentesen és átfedés nélkül) lefedni?

**49.** A $8\times8$-as sakktábla mezőinek vegyük a középpontjait. Miért nem lehet ezt a 64 pontot 13 egyenessel páronként elválasztani egymástól?

**50.** Miért nem lehet a $8\times8$-as sakktáblán 33 huszár figurát úgy elhelyezni, hogy egyik se üsse valamely másikat?

**1.** $111=3\cdot 37$.

**2.** Az egyenlet bal oldalán $x$ lehetséges értékei 2 és 3 között vannak, s ilyen $x$-re a jobb oldal negatív.

**3.** A háromszög területképletéből adódik, hogy minden oldala legfeljebb 1 egység.

**4.** Tegyük fel, hogy $k$ darab konkáv négyszögre bontottuk. Konkáv csúcs nem lehet a sokszög határán, és két ilyen csúcs nem eshet egybe. Ennek alapján a konvex sokszög szögösszege=a négyszögek szögeinek összege $(=k\cdot 360°)$ — a sokszög belsejében levő $k$ darab konkáv csúcs körül levő szögek összege $(=k\cdot 360°)$, s ennek eredménye 0°.

**5.** Egy rácspontot meg tudunk adni két koordinátájával. Az 5 rácspont közt mindig lesz két olyan, amelyek első koordinátái, illetve második koordinátái azonos párosságúak (skatulya-elv). Így ezt a két rácspontot összekötő szakasz felezőpontja szintén rácspont.

**6.** Figyeljük az egymáshoz csatlakozó szögszárakat, a 120°, 120°, 110° szögeket. Ezek egy köríven $120°+120°+110°<360°$ miatt nem csatlakozhatnak egymáshoz.

**7.** A felírt egyenlőség $999(a-d)+99(b-c)=1008$, illetve egyszerűsítés után $111(a-d)+11(b-c)=112$ alakban írható. Ebből $a-d=1$, azaz $11(b-c)=1$ következik.

**8.** Köbszám 9-cel osztva csak 0, 1 vagy 8 maradékot adhat.

**9.** Két egymást követő szám szorzata 3-mal osztva 0 vagy 2 maradékot adhat.

**10.** Hasonlóan az előző feladathoz. Másképp: két egymást követő szám szorzata 0, 2 vagy 6 jegyre végződik.

**11.** $n^2+n=n(n+1)$ az előző válasznál leírtak szerint 0, 2 vagy 6 jegyre végződik, amiből adódik, hogy $n^2+n+2$ nem osztható 5-tel. Másképp: a 9. feladatra adott válasz alapján $n^2+n+2$ nem osztható 3-mal.

**12.** Ha $n=2k$, akkor $3^{2k}+1$ nem osztható 4-gyel, mert páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1 maradékot ad, így $3^{2k}+1=(8m+1)+1$. Ha $n=2k+1$, úgy $3^{2k+1}+1=3\cdot 3^{2k}+1=3\cdot(8m+1)+1=4(6m+1)$, tehát a szám nem osztható 8-cal.

**13.** Négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adhat.

**14.** Az $1\cdot 2\cdot 3\cdots 1988$ szorzat értéke nem négyzetszám, mivel prímtényezős felbontásában van olyan prím, pl. 997, mely csak első hatványon szerepel.

**15.** Az 1, 2, 3, ···, 33 számok összege páratlan.

**16.** A megadott szám nem osztható 3-mal.

**17.** Páros sok páratlan szám összege páros. Páratlan sok egymást követő páratlan szám összege osztható a középső páratlan számmal.

**18.** Legyen $(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+k)=2^{100}$. Ebből $k(2n+k+1)=2^{101}$, azonban a bal oldal egyik tényezője mindig páratlan.

**19.** Legyen $b^2-4ac=23$, ebből $b^2-25=4ac-2$, $(b-5)\cdot(b+5)=2\cdot(2ac-1)$. A bal oldalon álló szorzatnak párosnak kell lennie, de ha páros, akkor az osztható 4-gyel is, míg a jobb oldal csak 2-vel osztható.

**20.** Tegyük fel, hogy a függvénynek a $t$ szám periódusa, $\cos\sqrt{x}=\cos\sqrt{x+t}$. Ha $x=0$, úgy $\cos 0=\cos\sqrt{t}$, ha $x=t$, akkor $\cos\sqrt{t}=\cos\sqrt{2t}$, azaz $1=\cos\sqrt{t}=\cos\sqrt{2t}$, $\sqrt{t}=2n\pi$, $\sqrt{2t}=2m\pi$, s ebből $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$ következne.

**21.** $x=1$-re $h(4)+h(2)=14$, míg $x=-1$-re $h(2)+h(4)=4$.

**22.** Legyen $f(0)=a$ és $g(0)=b$. Ekkor minden $(x, y)$-ra $a\cdot g(y)=1$ és $f(x)\cdot b=1$, valamint $a\cdot b=1$, ezekből $f(x)\cdot g(y)\equiv 1+1+x^2\cdot y^2$.

**23.** Legyen $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1=f(x)\cdot g(x)$, ahol $f(x)$, $g(x)$ egész együtthatós polinomok. Ekkor $f(a_i)=-g(a_i)=\pm 1$ $i=1, 2, \ldots, n$. Az $f(x)+g(x)$ polinomnak ezért van $n$ darab gyöke, ezért legalább $n$-edfokú, tehát $f(x)$ és $g(x)$ közül legalább az egyik $n$-edfokú.

**24.** Legyen $f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=2$ és $f(b)=3$, ahol $f(x)$ egész együtthatós polinom. $b-a_i \mid f(b)-f(a_i)$ miatt $|b-a_i|=1$ $i=1, 2, 3$ lenne.

**25.** Legyen az $f(x)$ polinom négy egész gyöke az $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$. Ekkor

$$f(x) = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot(x-a_3)\cdot(x-a_4)\cdot g(x)$$

alakban írható. Ha valamely egész $x$-re $f(x)=7$ lenne, úgy 7 előállna legalább négy különböző egész szám szorzataként.

**26.** Átrendezve $19(x^3-100)=84(1+y^2)$, amiből $7\mid 84$ miatt $7\mid x^3-100$, s ez utóbbi nem lehet.

**27.** $x=-1, -2, \ldots$ helyettesítéseket végezve rendre kapjuk $f(-2)=0, f(-3)=0, \ldots$, azaz ennek a polinomnak végtelen sok gyöke lenne.

**28.** Az $y=x\cdot(1-x)$ függvény vizsgálata adja az $x\cdot(1-x)\leqq\dfrac{1}{4}$ egyenlőtlenséget. Ebből adó-

dik az $a\cdot(1-b)\cdot b\cdot(1-c)\cdot c\cdot(1-a)\leqq\frac{1}{64}$ egyenlőtlenség, ami ellentmondásban áll a kiszabott feltételekkel.

**29.** Ha $x, y, z$ azonos előjelű, s pl. $x$ a legnagyobb abszolútértékű, akkor $|x|<|y-z|$ nem teljesül. Ha $x, y, z$ közt van két különböző előjelű és $x<y<z$, úgy $|x|<|z-y|$ és $|z|<|y-x|$ közül nem teljesül mindegyik.

**30.** Legyen $1=a_1q^k$, $2=a_1q^m$, $3=a_1\cdot q^n$. Ebből $q^{m-k}=2$, $q^{n-k}=3$, azaz $2^{n-k}=3^{m-k}$ lenne.

**31.** Ha $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}+\ldots=\frac{n}{m}$, úgy szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát $m!$-sal, ekkor a bal oldalon is egész számnak kell állnia. Azonban $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\ldots<\frac{1}{m+1}+$

$+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+1)^3}+\ldots=\frac{1}{m}<1.$

**32.** Tegyük fel, hogy a szám racionális. Akkor van olyan $t$, amelyre a tizedestörtben néhány számjegy után a következő számjegyek $t$ periódussal ismétlődnek. Ez azért nem lehet, mert a tizedestörtben előfordul $t$ darab egymást követő 0 (vagy 1-es, 2-es stb.).

**33.** Az előbbi feladat megoldásához hasonlóan indokolható. Használjuk fel, hogy Dirichlet tétele szerint pl. a $10^t\cdot n+1$ $n=1, 2, 3, \ldots$ sorozatban van (végtelen sok) prímszám.

**34.** A szám 2-es alapú számrendszerbeli alakjában a „tizedesvessző" után a 0—1 számjegyek ismétlődésében nincs periodikusság.

**35.** Hasonló az előzőhöz.

**36.** $a_1+a_2+\ldots+a_{34}>0$ és $a_1+a_2+\ldots+a_{30}<0$ miatt $a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}>0$. Ugyanígy belátható, hogy $a_{35}+a_{36}+a_{37}+a_{38}>0$, ..., $a_{47}+a_{48}+a_{49}+a_{50}>0$. Ezekből $a_{31}+a_{32}+\ldots+a_{50}>0$, ami ellentmond annak, hogy $a_{31}+\ldots+a_{10}<0$ és $a_{41}+\ldots+a_{50}<0$.

**37.** A 0, 1, 2, 8, 9 számok közül semelyik kettő nem helyezhető egymás mellé. Ezért a másik öt szám közül bármelyik az előbbi öt közül kettővel szomszédos. Azonban a 7 csak a 2-nek lehet szomszédja.

**38.** Az 1 és $-1$ számokból öt számnak az összege csak az 5, 3, 1, $-1$, $-3$, $-5$ értékeket veheti fel.

**39.** A táblának figyeljük azt a két mezőjét, melyben az 1-es és a 64-es áll. Egyik mezőről a másikra szomszédos mezőkön lépkedve legfeljebb 7 lépésben mindig el lehet jutni. Azonban $7\cdot 8<$ $<63$.

**40.** Szorozzuk össze a sorokhoz és az oszlopokhoz rendelt 50 számot, a szorzat értéke 1, hiszen a táblázatban levő számok mindegyike kétszer fordul elő tényezőként (egyszer a sora, egyszer az oszlopa szerint). Ez azt jelenti, hogy az 50 szám közt nem lehet pontosan 25 darab 1-es és 25 darab $-1$-es.

**41.** Vegyük például az 1-es számot, összesen 11 db 1-es van a táblázatban. Párosítsuk azokat az 1-eseket, melyek egymás tükörképei a főátlóra nézve. Ebből látható, hogy nem jut mindegyik 1-esnek pár, tehát a főátló tartalmaz 1-est. A főátlóban szerepelnie kell mind a 11 számnak, és ezért mindegyik csak egyszer fordulhat elő.

**42.** Színezzük a sakktáblát a szokásos módon. Az adott síkidom 1 vagy 3 fekete mezőt fed le, a $10\times 10$-es tábla lefedéséhez szükséges 25 db síkidom ezért páratlan számú mezőt fed le, tehát nem fedheti le az 50 fekete mezőt.

**43.** Egy bástya egy sort, hét bástya legfeljebb hét sort tart ütés alatt.

**44.** A huszár fekete mezőről fehérre, fehérről feketére lép. Ha a bal alsó mező fekete, akkor a jobb felső is fekete. A huszár a bal alsó sarokból indulva a 63. lépésben nem léphet a jobb felső fekete mezőre.

**45.** A hiányos sakktáblán nem egyenlő a fekete és fehér mezők száma.

**46.** Bármely két sort vagy oszlopot elválasztó vonal két olyan részre vágja a táblát, amelyek mindegyike páros számú mezőt tartalmaz. Ezért ha egy dominó átmetsz egy vonalat, akkor kell, hogy még egy dominó messe ezt a vonalat. Az 5 vízszintes és 5 függőleges vonalat ezért legalább 20 dominónak kell kereszteznie, de a $6\times 6$-os táblán csak 18 dominó van.

**47.** A sakktáblát a szokástól eltérő módon színezzük, legyenek sorai felváltva fekete, illetve fehér színűek. Ekkor a 9 figurából pl. 6 áll fekete, 3 fehér mezőn. Ez a lépések során nem változik, pedig a célul kitűzött állapotban 6 figurának fehéren, 3-nak feketén kell állnia.

**48.** Színezzük a sakktáblát a szokásostól eltérően, a tábla megcsonkított átlójával párhuzamosan színezzük egymást követően az „átlós sorokat" 3 színt használva (tehát egy „átlós sorban" a mezők azonos színűek). Ekkor egy $3\times 1$-es dominó mind a három színből lefed egy-egy mezőt. Azonban az így színezett sakktábla azonos színű mezőinek száma 18, 21, 24.

**49.** Tekintsük a ponthalmaz burkát alkotó 28 pontot. Már ezeket sem lehet 13 egyenessel páronként szétválasztani.

**50.** Osszuk fel a táblát 8 db 2×4-es részre. A 33 figurából ezek egyikébe biztosan jut legalább 5, s ezek közt van kettő, melyek ütik egymást.

DR. HAJNAL IMRE
ny. szaktanácsadó
*Szeged*

## A tanári munka és a tankönyv
### (részlet egy készülő tanári segédkönyvből)

A matematika tanításának általánosan elfogadott útja: problémafelvetés, új fogalmak kialakítása, definiálása, majd ezek tulajdonságainak megismerése, az ismert fogalmakkal való kapcsolatainak keresése, összefüggések, tételek bizonyítása, ezt követően a tanult ismeretek sokrétű alkalmazása, gyakorló példák, feladatok megoldása.

A tankönyv fejezeteit ennek megfelelően igyekeztünk felépíteni. (Ez és a további utalások Dr. Hajnal Imre: Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára, Tankönyvkiadó, 1988. tankönyvre vonatkoznak.) Ez az út azonban nem törvényerejű, van olyan anyagrész, amelynek feldolgozása más szempontokat kíván. Tankönyvünkben elsősorban a tárgyalt téma kívánalmait vettük figyelembe, ezért a fejezetek logikai váza különböző.

A tankönyvben egy-egy fejezet kezdetén a motiváló feladatok egyszerűek, az osztály adottságainak jobban megfelelő példákkal könnyen helyettesíthetők. Törekedtünk arra, hogy a definiciók, a tételek könnyen megtalálhatók legyenek. A kidolgozott „mintapéldákon" a tanult ismereteknek többféle alkalmazását mutattuk be.

A szakmai, valamint a logikai felépítésre nagy gondot fordítottunk, de igyekeztünk elkerülni azt, hogy bárki is úgy érezze, hogy ez a tankönyv határozott pedagógiai módszert diktál.

*A tanítandó anyagot nekünk kell élővé tennünk.* Az óravezetés nem lehet mindig azonos módszerű. A körülmények olyanok, hogy az azonos felépítésű óráknak, az egyhangú óravezetésnek nincs kellő eredménye. (A monotonság nagyon könnyen konfliktusokhoz is vezet.)

A matematikatanítás kulcskérdése: *Hogyan tudjuk élővé tenni a tanítandó anyagot?* Ehhez a szakmai ismereteken kívül szakdidaktikai ismeretek is kellenek.

A szakmai ismereteket nyújtja az egyetemi képzés, a továbbképzések, valamint a nagy számban megjelenő szakkönyvek. A szakdidaktikai ismereteket nyújtják a különböző módszertani előadások és könyvek. Ezekről Pólya György ezt írja [1]:

„Egy tanár, akivel bizalmasan beszélgettem, szemléletesen fejezte ki ezt a széles körben elharapózott érzést: A matematikatanszékek olyan húst kínálnak, mint a csizmatalp, amelyet alig tudunk megrágni, a módszertant tanító iskolák pedig olyan híg levest, amelyikben nincs is hús."

Ez a megállapítás nem teljesen helytálló. Maga Pólya György is megcáfolta ezt, hiszen az, amit ő a munkásságával és a könyveivel nekünk nyújtott, az nem „csizmatalp" és nem „híg leves".

A szakdidaktikáról vallott ellentétes nézetek valószínűleg abból erednek, hogy a nagy létszámú középfokú oktatásban az egyes osztályok között nagyon nagy különbségek vannak. Lehetséges, hogy valamely mikrokörnyezetben jól alkalmazható módszerek más környezetben teljesen használhatatlanok.

Az utóbbi évek tapasztalatai azt mu-

tatják, hogy a gimnáziumokban a komoly szakmódszertani kérdések addig nem is aktuálisak, amíg a tanulók megfigyelőkészsége, gondolkodókészsége nem ér el bizonyos szintet. Kell, hogy a tanulók emlékezete és beszédkészsége legalább olyan fejlett legyen, hogy az órán elhangzottakat megjegyezzék, megértsék, ha kell, akkor képesek legyenek értelmesen megismételni és a kérdéseken gongolkodni. Egy „átlagos" összetételű osztályban vannak olyanok, akik ezt a szintet nem érik el. Ha hozzájuk igazodik a tanári vezetés, akkor hozzájuk hasonul az osztály értelmesebb része is. Ha a tanári óravezetés a leggyengébb tanulókkal nem törődik, akkor az osztályon belül olyan nagy különbségek adódnak, amelyek konfliktusokat eredményeznek.

Valamilyen érthetetlen okok miatt a meglévő súlyos hiányokról nem beszélünk, pedig ezek nemcsak a matematikaórákon és nemcsak az iskolákban tapasztalhatók, hanem a munkahelyeken is. *Megfigyelések, azok megjegyzése és tudatos megfogalmazása nélkül egyetlen munkahelyen sem lehet hasznos munkát végezni.*

A matematikaoktatás sikere azon is múlik, hogy a súlyos hiányokat észrevesszük-e, és törődünk-e ezek megszüntetésével.

Az I. osztályos tankönyv 13. fejezetének a 113. feladata 7 darab olyan egyszerű egyenlet, amelyeket találós kérdésként is megfogalmazhatunk. Az első: „Melyik számra gondoltam, ha a négyszeresénél hárommal nagyobb szám 11?" Hallomás után, a fejben történő $11-3=8$, $8:4=2$ számolással könnyedén megkapjuk a gondolt számot. A következő találós kérdésekben a gondolt számmal rendre eggyel több műveletet jelöltünk ki. Az úgynevezett „lebontogatással" mind a hét feladat megoldható.

Hasznos kísérlet az, ha ezekhez hasonló találós kérdésekből sorozatot állítunk össze, és a kérdések elhangzása után — írásban történő számolás nélkül — azonnal kérdezzük a gondolt számot. Könnyen észrevehetjük, hogy a tanulók jelentős része már 3-4 lépést nehezen tud emlékezetében tartani, és hamar elfárad, ha komolyan igénybe vesszük az emlékezetüket. Azt is észrevehetjük, hogy 30—35 tanuló között akad néhány, akik „jól bírják" a pergő kérdéseket és helyesen válaszolnak. Megfelelő gyakorlással mindenkinek fejleszthető a megfigyelőkészsége is és az emlékezete is.

Az ilyen apró feladatok kevés időt kívánnak, a tanulók kedvelik is (ha nem visszük túlzásba ezeket). A válaszok az osztályról úgy mutatnak reális képet, hogy azt minden tanuló akaratlanul is észreveszi. A jókat ez ambicionálja, a gyengék is látják, hogy nekik jobban kell igyekezniük, ha lépést akarnak tartani az osztály többségével.

Az említett példák a tankönyv 13. fejezetének végén vannak kitűzve, de hasonló kérdésekkel már korábban is foglalkozhatunk.

A tankönyv 1. fejezete a számok áttekintése. Ennek az 1. feladata házi feladat is lehet, de az órán egyszerűbb kérdésekkel ajánlatos azt előkészíteni. Például: Más alakban hogyan írhatjuk fel az $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{1}{0{,}5}$, $\frac{2}{0{,}25}$ stb. számokat? Kérhetjük ezeknek a számoknak a számegyenesen történő kijelölését is. Egyszerű egyenletek találós kérdésként történő megfogalmazása is hozzákapcsolható a fejezet anyagához.

*A tanulók megfigyelőkészségét és emlékezetét megbízhatóan fejlesztik az egymást gyorsan követő és fokozatosan nehezedő egyszerű feladatok.* Ezekkel fokozhatjuk az alapismeretekben való biztonságunkat is.

Ilyen feladatokat azonban a tankönyvben nem közölhetünk. Tankönyvben visszatetszők lennének az olyan 5-6 soros kérdések, amelyekre egyetlen szám, vagy egy-két szavas mondat a válasz. Ilyeneket csak az órai anyaghoz kapcsolódóan, az osztály érdeklődéséhez igazodva, megfelelő módon rögtönözve fogalmazhatunk meg.

Az összetettebb ismereteket kívánó anyagrészeknél is hasznos, ha a gondolatmenetünkhöz jól kapcsolódó kérdéseket, feladatokat fogalmazunk meg. Ehhez az kell, hogy a munkánk célja tudatosan éljen bennünk, világosan lássuk a tanítandó anyag lényegét is, és minden részletét is. Ha a tanítandó anyagot nemcsak ismerjük, hanem benne is élünk a gondolatkörében, akkor közvetlenül tudunk róla beszélni, mondanivalónk érthető lesz. Sokféleképpen lehet tanítani és sokféleképpen lehet magyarázni.

Tanulságos elolvasnunk azt, amit Kalmár László a pedagógiai módszeréről mesélt [2]:

„Módomban volt ezek után a saját elképzeléseim szerint olyan előadásokat tartani, amelyekben a hallgatókkal, mint a jövő szakembereivel — néhány gimnazista kori olvasmányomon kívül — Fejér Lipóttól tanult szellemben foglalkoztam. Hogy ez miben állt, azt leginkább a következő történettel jellemezhetem. Fejér egyszer panaszkodott nekem, hogy egy cikk, amely érdekelte volna, úgy van megírva, hogy nem sikerült megérteni. A szerzőjének, mondta Fejér, az az ambíciója, hogy csodálkozzék az olvasó, milyen nagy zseni lehet, aki ezt a cikket írta, hogy ilyen gondolatok pattantak ki a fejéből. Bezzeg nekem, ha cikket írok az az ambícióm, hogy az olvasó azt mondja: ez is valami? Hiszen ezt én is meg tudtam volna csinálni. Szóval én is igyekeztem hallgatóimnak azokat a folyamatokat is megmutatni, miképpen jön rá az ember az addig ismeretlen fogalom, tétel bevezetésének, bebizonyításának módjára."

*A matematikai fogalmakat és ismereteket különböző szemlélettel taníthatjuk.* A sokféle szemléletet nem is tudjuk számba venni. Elrettentő példának azonban mutatunk egy olyan szemléletet, amely az igazi értelemben vett tanítástól idegen, eredménytelen és káros: „A körülöttünk lévő világ, valamint az arról alkotott alap- és középfokú ismeretek, tudományok eleve adottak. Ezeket — közöttük a matematikai ismereteket is — késznek tekintjük. Ezekből a kész ismeretekből azokat, amelyeket a tanterv előír, közöljük tanítványainkkal. Ilyen közlés például: $a^0=1$ $(a\neq 0)$, az $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ egyenlet megoldásai:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

stb. Nekünk csak továbbítanunk kell a kész ismereteket." Bármennyire visszatetsző is ez a gondolatsor, nyomai mégis megtalálhatók néhány matematikaórán. Van, aki előnyösnek tartja, mert kevés idő kell az ismeretek közléséhez és sok idő marad a gyakorlásra, a „sulykolásra".

Az ebből a szemléletből folyó oktatásnak azonban nincs nevelő ereje. Bizonyos ideig alkalmazható, de az ilyen módszerek holt ismereteket adnak. Ilyen úton lehet jelentős tudást szerezni. Ez a gondolkodásmódot nem fejleszti, hanem sorvasztja. Szolgalelkeket nevel. „Antipedagógiának" nevezhetnénk. (Ha egy tanulót minden tárgyból hasonló módszerekkel tanítanának, akkor annak számára az oktatás szellemi tragédia lenne.)

Tanításunkkal *éreztetnünk kell azt, hogy a matematika tudományos emberi tevékenység eredménye.* A matematika hosszú fejlődéssel érte el a mai fejlettségi fokát és még tovább fejlődik. A matematika fogalmait az eddigi emberi gondolkodás alakította olyanná, amilyennek mi most ismerjük. Történeti fejlődésének megismerése érdekes lenne, de ahhoz nekünk nincs időnk.

A középiskolákban a ma szükséges középfokú matematikai ismereteket igyekszünk gazdaságosan megtanítani. Közben azonban éreztetnünk kell a történeti fejlődést is. Egy-egy új fogalom kialakítását motiváló problémával készítjük elő. Ezek lehetnek gazdaságiak, vagy technikaiak, vagy lehet a logikai teljességre törekvés. A tömör elnevezések és a megszokott jelölések valójában praktikus rövidítések, amelyekben az előttünk lévő nemzedékek már megálla-

podtak. Számunkra az a hasznos, ha ezeket a megállapodásokat mi is betartjuk.

A matematikaórák nem lehetnek történelem órák, de nem zárkózhatunk el a történelem iránt ma általánosan jelentkező érdeklődéstől. Ez az érdeklődés nem egyszerű divat. Ez egy jobb értékrend keresésének egyik tünete és egyik eszköze. Ezt nem szabad figyelmen kívül hagynunk.

Munkánkat segítik a tankönyvek és a feladatgyűjtemények. Azonban ha csak a könyvekben található és zártan megfogalmazott feladatokat tárjuk tanulóink elé, akkor nagyon leszűkíthetjük a matematikai gondolkodásra nevelést és tanulóinkban a matematikáról torz kép alakulhat ki. Ha mód van rá, akkor *oldjuk fel, tegyük élővé a példatárak zárt szövegezésű feladatait.*

Például megszokott feladat: „Bizonyítsuk be, hogy $15|2^{16}-1$-nek és $17|2^{16}-1$-nek." Természetes, hogy ez érthetően megfogalmazott, tanulságos feladat. A bizonyítás után azonban szabadabbra engedhetjük gondolatainkat. Kérdezhetjük, hogy nyújt-e más eredményt is a bizonyítás. Vajon csak 15 és 17 osztója a $2^{16}-1$-nek? A $2^{16}-1=(2^8-1)(2^8+1)=$ $=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$ átalakítás során kiderül, hogy $2^8+1=257$ is osztója $2^{16}-1$-nek. 15-nek az osztói a $2^{16}-1$-nek is osztói. Minden prímszám osztót megtaláltunk? Összesen hány osztója van a $2^{16}-1$-nek?

A matematika iránt érdeklődő gondolkodó emberben természetesen merülnek fel ezek a kérdések. Tanítványainkat erre kell nevelnünk. Illúziókban azonban nem ringathatjuk magunkat. Nem mindenki fog hasonló kérdéseket megfogalmazni. Minden osztályban különböző képességű és különböző érdeklődésű tanulók vannak. Ha egy osztályban 5-6 tanuló önállóan észreveszi és megfogalmazza az érdekes problémákat, az már figyelemre méltó eredmény. Ha ezt látja az osztály többi 30 tanulója, akkor azokban természetes módon kialakul a helyes értékrend és a reális önkritikai érzék.

Ezekről a kérdésekről Pólya György is ír [3]:

„Matematikai feladatok megoldására valaki akkor képes, ha túlmenve a vonatkozó matematikai anyag ismeretén, tud értelmesen gondolkodni, és rendelkezik azzal a beállítottsággal, amelyet a mindennapi életben józan észnek hívunk. Ha minden tanítványunknak — a matematika alkalmazóinak és nem alkalmazóinak egyaránt — valamit nyújtani akarunk, akkor a feladatmegoldást úgy kell tanítanunk, hogy ahhoz körülbelül egyharmad részmatematika tudásra és kétharmad rész józan emberi észre legyen szükség. Józan emberi észt és hasznos gondolkodási szokásokat plántálnunk nem mindig könnyű, de ha sikerül, akkor valóban tettünk valamit tanítványainkért, bármi lesz is később a hivatásuk."

Sajnos a problémák észrevevése, tudatos megfogalmazása, feladatok, feladatsorok összeállítása, készítése a tanárképzésnek és a tanári továbbképzésnek elhanyagolt területe.

Gondoskodnunk kell arról is, hogy tanítványaink tartósan megjegyezzék és alkalmazni tudják a tanult ismereteket. A gyakorlás akkor hatékony, ha mindenki önállóan dolgozik. Ez sokat hangoztatott elv. Emellett azonban arra is gondolnunk kell, hogy az új anyagrészek alkalmazásai közben könnyen tévedhetnek a tanulók. Ha ilyenkor egyikük a táblánál dolgozik és hangosan magyarázza a munkáját, akkor ez az egész osztály számára is hasznos. Lehet, hogy ő nem jól értette meg az új anyagot és rosszul akar dolgozni. Tévedésének kijavítása az egész osztály számára tanulságos, hiszen valószínű, hogy mások is elkövették volna ugyanazt a hibát.

A gyakorló órák megszervezése a tanárra hárul. Megfigyelései és tapasztalatai alapján, a körülményeket gondosan mérlegelve kell döntenie a gyakorlás módszeréről.

*A nagyobb fejezetek tárgyalásának befejezése után elengedhetetlen az összefoglalás.* Ez legyen lényegremutató és rövid.

Hasznos, ha a fejezet logikai felépítését és a legfontosabb fogalmakat, tételeket olyan táblai vázlattal rögzítjük, amelyet a tanulók leírhatnak. A fejezetről ez olyan áttekintést adjon, amely alapján később is könnyű lesz a tanultak ismétlése.

A tanév végén feltétlenül szükséges 2-3 hétig tartó ismétlés. Ez rendszerező jellegű is legyen és a tanult anyag gyakorlását is szolgálja.

Az összefoglalás szorosan kapcsolódik az anyag logikai felépítéséhez is, a tárgyalt kiegészítő anyagrészekhez is. Ezek osztályonként változók. Emiatt nincs összefoglaló fejezet a tankönyvben. A tanulók számára az a hasznosabb, ha az ő tanáruk foglalja össze a tárgyalt anyagot és nem a tankönyvíró.

*A tanár tanítása önálló alkotó munka.* Még akkor is az, ha talál olyan tankönyvet, amelynek logikai felépítésével és módszerével teljesen egyetért. *Ez a tankönyv és ez a kézikönyv csak segíteni akarja ezt az alkotó munkát, helyettesíteni nem tudja.*

IRODALOM

[1] PÓLYA GYÖRGY: *A problémamegoldás iskolája II.* 1968. 124. oldal.
[2] TÓTH BÉLA: *Kalmár László.* Tiszatáj, 1976. április. 16. oldal.
[3] PÓLYA GYÖRGY: *A problémamegoldás iskolája II.* 1968. 132. oldal.

DR. HACK FRIGYES
egyetemi adjunktus
ELTE Ált. Számítástudományi Tanszék

## Javaslat írásbeli dolgozatok értékelésére

A tanítási munkában nagyon fontos a számonkérés, amely azon kívül, hogy képet ad a tanulók előmeneteléről, lehetőséget ad a tanárnak arra is, hogy az ismeretközlés eredményességéről tájékozódjon. Ez utóbbihoz különösen sok információt szolgáltat egy írásbeli dolgozat, hiszen a szóbeli feleltetések alkalmából csupán egy-két tanuló felkészültségéről tudunk meggyőződni. Hamis képet kapunk azonban mind a tanulók egyéni teljesítményéről, mind az osztály egészéről, ha az értékelést nem végezzük eléggé körültekintően. Szerencsére a matematikát tanító pedagógusok számára szaktárgyuk ismerete kellő alapokat biztosít ahhoz, hogy az írásbelik értékelésében olyan módszereket alkalmazzanak, amely az objektív mérés kritériumaihoz közelít.

Az elbírálás szubjektivitásának csökkentésére régóta használt eljárás a feladatok pontozása. E lap korábbi számaiban több cikk is foglalkozott ezzel, ezért itt felesleges ismétlés lenne a pontozási rendszer taglalása. Egy nagyon precíz, igényes módszer található Kun Péter hivatkozott [3] cikkében. De alkalmazzuk bár a legjobb módszert is a pontszámok meghatározására, mindig fennáll a tévedés veszélye. Tegyük fel például, hogy a dolgozatot összeállító tanár úgy ítéli meg, hogy két feladat azonos értékű, s megoldásukért azonos ponttal jutalmazza a tanulót. Ám utólag kiderül, hogy az egyik feladatot szinte mindenki, míg a másikat alig néhányan oldották meg. Nyílvánvaló, hogy hibás volt a döntés, noha a tanár minden tekintetben körültekintően járt el. Nem hibáztatható, csupán tévedett, de e tévedésének következményei vannak: Igazságtalanul értékel néhány diákot, hamis visszajelzést kap munkájáról.

Pontosan ugyanezt mondhatjuk el abban az esetben is, ha a feladatok egyes lépéseire ún. részpontokat állapítunk meg. Mi a biztosítékunk arra, hogy az általunk azonosnak vélt két lépés valóban azonos erőkifejtést, azonos teljesítményt igényel a tanulóktól? Egyetlen támpontja van a tanárnak: A tapasztalat.

Ez azonban a szolgálati idő függvénye és a gyakran változó tantervek mellett nem mindig támaszkodhat összehasonlítható körülményekre. Bizonyos vagyok benne, hogy minden kartársam tudna példákat sorolni olyan pontozásra — feladatgyűjteményben vagy érettségi dolgozatokban — amely nem találkozik saját ítéletükkel. Pedig ezeket a feladatsorokat és pontozásukat többen állítják össze. A mindennapos tanítási munka közben összeállított dolgozatoknál még nagyobb a tévedés veszélye.

Egyetlen megoldás kínálkozik: A pontozás utólagos korrekciója, melyben a feladatok közötti különbségek kifejezésére a feladatok relatív nehézségi fokát kifejező mutatót használunk a szerzett pontszámok súlyozására. A dolgozatok kijavítása után már ismerjük az osztály „véleményét" arról, hogy melyik feladat volt nehéz, melyik könnyű. Ez kiderül abból, hogy melyik feladatot hányan oldották meg helyesen.

*A számítás menete*

Jelölje $p$ a példák (vagy részfeladatok) számát és $n$ az osztály (csoport) létszámát. Az egyes példák maximális pontszámai legyenek rendre $m(1), \ldots, m(p)$, míg a tanulók által elért részpontokat az $n$ sorból és $p$ oszlopból álló $[x(ij)]$ mátrix elemei tartalmazzák.

Tekintsük az $[x(ij)]$ mátrix $j$-edik oszlopában álló elemek összegét:

$$X(.j) = \sum_{i=1}^{p} x(ij).$$

Ez az összeg a $j$-edik példa megoldásával az osztály által szerzett pontok összege. Tekintettel arra, hogy $\forall i,j\colon 0<x(i,j)<mj$, ezért az oszlopösszegekre:

$$\emptyset \leqq X(.j) \leqq n.m(j).$$

A bal oldalon az egyenlőség akkor teljesül, ha senki sem oldotta meg a példát, míg a jobb oldalon akkor, ha mindenki teljes megoldást adott.

A feladatok egy ésszerű súlyozását adhatjuk meg a következőképpen:

$$S(j) = \begin{cases} n.m(j)/X(.j), & \text{ha } X(.j) > \emptyset, \\ \emptyset, & \text{ha } X(.j) = \emptyset. \end{cases}$$

Az $i$-edik dolgozat pontjaiból a súlyokkal számított összeg:

$$P(i) = \sum_{j=1}^{p} s(j).x(ij).$$

Ennek a súlyozott összegnek a minimuma 0, maximuma pedig

$$M(i) = \sum_{j=1}^{p} s(j).m(j).$$

A tanuló teljesítményét a $[0; 1]$ intervallumba eső $T(i)=P(i)/M(i)$ mutatóval fejezhetjük ki.

*A teljesítmény értékelése*

Mivel az évi munka értékelésének alapját a szóbeli és írásbeli számonkérés érdemjegyei képezik, a $T(i)$ mutatót, mely ugyan önmagában is jó mérték a teljesítmény mérésére, osztályzatra kell átszámítani. Erre több lehetőség is kínálkozik. A számító-

gépes feldolgozást tartva szem előtt legegyszerűbb a $T(i)$ mutató [Ø; 1] értékkészletének 5 egyenlő részre osztásával állapítani meg az osztályközöket.

Tekintettel arra, hogy mind a súlyok, mind a súlyozott pontösszeg meghatározása igen sok számolással jár, a módszert csak számítógéppel érdemes alkalmazni. Mivel az iskolákban sokféle mikrogép található, teljes és ezért csak egy géptípusra alkalmas program helyett egy vázlatos BASIC programot mutatok, amelyet a felhasznált géphez könnyen lehet adaptálni. A közölt program-vázlat billentyűzetről olvassa be az adatokat és képernyőre írja a feladatok súlytáblázatát a kollektív munka eredményének elemzéséhez, továbbá a tanulók számított pontszámait és a teljesítményt százalékos formában. A konkrét géphez igazításkor a be- és kiviteli perifériának megfelelő átalakításokkal kell kiegészíteni. Ha képernyős kiírásnál maradunk, akkor a lista kifutását megakadályozó utasításokat kell alkalmazni.

```
1ØØ rem =====”Értékelés”=====
11Ø input ”Példák száma=”; p
12Ø dim m(p)
13Ø print ”Maximumok:”
14Ø for j=1 to p
15Ø : print j; : input m(j)
16Ø next j
17Ø input ”Létszám=”; n
18Ø dim nev$(n), x(n, p)
19Ø for i=1 to n
2ØØ : print i; ”név:”; : input nev$(i)
21Ø : print ”pontok:”
22Ø for j=1 to p
23Ø : print j; : input x(i, j)
24Ø next j, i
25Ø rem ——— „A feladatok pontozása
26Ø print ”No.”, ”Max.”, ”Súly”
27Ø m=Ø
28Ø for j=1 to p
29Ø : s(j)=Ø
3ØØ : for i=1 to n
31Ø : : s(j)=s(j)+x(i, j)
32Ø : next i
33Ø : if s(j)<>Ø then s(j)=n*m(j)/s(j)
34Ø : m=m+s(j)*m(j)
35Ø : print j, m(j), s(j)
36Ø next j : print : print
37Ø rem ———„A tanulók értékelése
38Ø for i=1 to n
39Ø t=Ø
4ØØ : for j=1 to p
41Ø : : t=t+s(j)*x(i, j)
42Ø next j
43Ø : print i ;nev$(i);
44Ø : print int(t+Ø.5), int(1ØØ*t/m+Ø.5)
45Ø next i
46Ø end
ready.
```

## IRODALOM


FRIED ERVIN: *Egy megjegyzés a tesztvizsgához.* A Matematika Tanítása, 1970. 141., 142. oldal.

ANTAL MIKLÓS: *Felkészülés a dolgozatírásra.* A Matematika Tanítása. 1973. 85—91. és 118., 119. oldal.

KUN PÉTER: *Javaslat felmérő, ellenőrző és érettségi feladatok pontszámainak megállapítására.* A Matematika Tanítása, 1973. 143—146. oldal.

DR. RÉDLING ELEMÉR
főiskolai docens
KKVMF SZI, Székesfehérvár

# Felmérések a logikai fogalmak témaköréből

## *1. Bevezetés*

A matematika középfokú tananyaga definíciók, tételek és alkalmazások láncolatából áll. Ennek feldolgozása során a tanulók több — alapvetően fontos — *logikai fogalommal* ismerkedhetnek meg, így pl. a *tétel*, a *definíció*, a *szükséges és elégséges feltétel* stb. fogalmakkal. Ezek ismerete nélkülözhetetlen a matematikaanyag *értelmes* elsajátításához. A felsőfokú matematikaoktatásában feltételezzük, hogy a hallgatók ezeket a fogalmakat már a *középiskolában* megismerték.

Évek óta rendszeresen felméréseket végzek műszaki főiskolai hallgatóink körében, amelynek során azt vizsgálom, hogy milyen kép alakult ki bennük a mondott fogalmakról. Az ily módon szerzett információkat azután az oktatásban hasznosítom.

Úgy vélem, hogy a *középfokú oktatás számára is hasznos lehet, ha visszajelzést kap egy-egy ilyen felmérésről.* Ilyen céllal íródott meg ez a cikk is.

A logikai fogalmak ismeretét vizsgáló felmérések több irányúak voltak, de ebben a cikkben csupán egyetlen kérdéskörrel foglalkozom. Azt vizsgálom, hogy a hallgatók hogyan látják a tétel és a definíció fogalompár kapcsolatát középiskolai tanulmányaik alapján.

## *2. A felmérésekről*

A vizsgálatokat a *Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola Számítógéptechnikai Intézetében* végeztem el a nappali tagozatos hallgatók körében. A műszaki főiskolákat tekintve a felvételi pontszámunk viszonylag magas, ezt az eredmények értékelésekor érdemes figyelembe venni. A hallgatók egyaránt kerülnek hozzánk gimnáziumokból és szakközépiskolákból. (A gimnáziumot végzettek a matematikát általában *fakultatív* tantárgyként tanulták.)

A felmérésekre a főiskolai tanulmányok megkezdésekor került sor, így itt csupán a középiskolai ismereteket vehettem számba. A tétel és definíció fogalompárral kapcsolatban csak azt vizsgáltam, hogy a hallgatók meg tudják-e különböztetni egymástól a *tétel és a definíció fogalmát,* továbbá a fogalmakat jelölő *szimbólumokat.* (Tehát a „tétel" és a „definíció" fogalmának meghatározását, körülírását nem kértem számon tőlük.)

A hallgatók azt a feladatot kapták, hogy *konkrét példákat* tekintve jelöljék meg, hogy közülük melyeket tekintenek *tételnek, definíciónak,* illetve egy-egy fogalom *jelölésének* (szimbólumnak). A hallgatók munkáját szóbeli magyarázattal igyekeztem megkönnyíteni, s az esetleges félreértéseket kiküszöbölni.

Megjegyzem, hogy ugyanezt a felmérést több éve *Vigné dr. Lencsés Ágnes* főiskolai adjunktus is elvégzi tanítványai körében a *Pollack Mihály Műszaki Főiskolán* (Pécs). A két főiskolán kapott eredmények *összhangban vannak* egymással, és ezt az objektivitás érdekében fontosnak tartom.

A felmérések anyaga az 1987/88. tanévben a következő volt:

1. Egy háromszög egyenlő szárú, ha van két egyenlő oldala.
2. Az egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyenlők.
3. Az egyenlő szárú háromszögnek van szimmetriatengelye.
4. Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata: **ab**.
5. Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata:
   $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \gamma$ (itt a $\gamma$ a vektorok szöge).

6. Az $\mathbf{a}(a_1; b_2)$ és $\mathbf{b}(b_1; b_2)$ vektorok skaláris szorzata:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

7. Az „$a$" valós szám $n$-edik hatványa $a^n$ (ahol az $n$ pozitív egész szám).

8. $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

9. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$.

10. $(\sin x)' = \cos x$.

Megemlítem, hogy a vektorok skaláris szorzatának témakörét a szakközépiskolát végzett hallgatók is tanulták, ez tehát nem volt ismeretlen számukra.

### *3. Néhány megjegyzés*

**1.** A legfontosabb észrevétel a következő volt: *a helyes válaszok aránya mindössze 40% körül mozog.* Viszonylag jó képességű hallgatók körében ezt az eredményt *nem tartjuk kielégítőnek.*

**2.** A felmérések eredményei — több éves átlagban — viszonylagos *stabilitást* mutatnak.

**3.** A hallgatók logikai fogalmainak hiányosságai gátolják az *értelmes* felsőfokú matematikaoktatást. A nehézségek áthidalására a műszaki felsőoktatásban alkalmazható modellt dolgoztunk ki. Ennek alkalmazásaként Pécsett és Székesfehérvárott is kb. fél éves *tudatos* munkával több év átlagában már *90%-ra emelkedett az ellenőrző felméréseken a a helyes válaszok aránya.*

**4.** Hasznosnak tartanánk, ha kidolgozásra kerülne és széles körben elterjedne a szükséges logikai fogalmak tisztázásának olyan módszere, amely a középiskolai oktatásban is eredményesen alkalmazható lenne. (A megoldáshoz gondolatokat, ötleteket egy következő cikkben szeretnénk adni.)

A matematika oktatásának fontos feladata a *deduktív szemléletmód fejlesztése.* Ez is szükségessé teszi a mondott logikai fogalmak tisztázását. A problémakör megoldását elősegítheti pl. az, ha a középiskolai oktatás során megvizsgáljuk, hogy — bizonyos vonatkozásban — a tétel és a definíció *viszonylagos* fogalmak. (Az ezzel kapcsolatos elemzést lásd pl. a [4]-ben, a 129—135., illetve a 141—149. oldalakon.)

Itt említem meg, hogy a középiskolában sem elégedhetünk meg azzal, hogy egy tétel igazolása során a tanulók ne lássák világosan, hogy egy adott definícióra, vagy pedig egy tételre, illetve a tétel megfordítására hivatkozunk.

* * *

Befejezésül a [6] alatt említett cikkből idézünk, amely már az *általános iskola felső tagozatában elvégzendő munkára utal.*

„Az egész matematika — és ezen túlmenően az általános műveltség — szempontjából igen nagy jelentősége van a tanulók azon képességének, hogy megérteni, visszaadni, és végül önállóan megfogalmazni, illetve levezetni tudjanak definíciókat és tételeket. E képesség kifejlesztése érdekében, mivel annak nagy jelentősége van az alkotó, logikus és hézagmentes gondolkodás, a világos és áttekinthető szó- vagy írásbeli ábrázolásmód kialakítása szempontjából, módszeresen és állandóan kell fáradozni már a 6., 7. és 8. osztályban is.

E cél érdekében, a hatodik osztályos tanulókkal példák segítségével meg kell értetni, hogy mi is egy definíció, és miben különbözik a definíció, az állítástól (kiváltképpen a tantételtől)."

*Felvetődik a kérdés: hol vagyunk mi ettől a szinttől??*

Remélem, hogy az itt elmondottak többeket is útkeresésre késztet.

IRODALOM

[1] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve.* Tankönyvkiadó, 1978.
[2] *A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve.* Oktatási Minisztérium, 1978.
[3] G. HAVAS KATALIN: *Formális logika.* Kossuth Könyvkiadó, 1973.
[4] DR. RÉDLING ELEMÉR: *Geometriai transzformációk.* Tankönyvkiadó, 1980.
[5] DR. RÉDLING ELEMÉR: *A deduktív gondolkodásmód fejlesztéséről.* A Matematika Tanítása, 1980/5.
[6] DR. K. WEBER: *Vezérfonalak a matematikaoktatáshoz.* A Matematika Tanítása, 1969/3.

BAGI GÁBOR
ny. középiskolai tanár
Barcs

## Az 1144. feladatról

A feladat:

Az alábbi összegben a különböző betűk különböző, az azonos betűk azonos számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{r} \text{ARARA} \\ +\ \text{TERE} \\ \hline \text{TERAS} \end{array}$$

Határozzuk meg az egyes betűk értékét!

Ha feltételezzük, hogy a feladat 10-es számrendszerbeli számokról szól, akkor COMMODORE—16 plus/4 számítógépen gépi kódú program írható. A program kiíratja a megtalált — összes — megoldást és a felhasznált időt. Ez jelen esetben 0,7 s volt. Gyorsabb gépen ennek a töredéke is elég.

A gépi kódot A Matematika Tanítása Szerkesztőségének kinyomtatva megküldtem. Aki kíváncsi a gépi kódú programra, írjon a következő címre: Bagi Gábor, Barcs, Széchenyi utca 32., 7570.

A Matematika Tanítása a program BASIC-részét és a futtatást közli. Íme:

```
10 REM**MAT. TAN. 1144.**
15 OPEN 4,4
17 CMD 4:LIST
20 TI$="000000"
30 SYS DEC ("5000")
40 C=DEC("5302") I : C1=DEC("530C"): C2=DEC("5309")
50 PRINT"ARARA" STR$(PEEK(C)+PEEK(C+1)*256+PEEK(C+2)*65536)
60 PRINT"+TERE"," "+STR$(PEEK(C1)+PEEK(C1+1)*256+PEEK(C1+2)*65536)
70 PRINT"TERAS",STR$(PEEK(C2)+PEEK(C2+1)*256+PEEK(C2+2)*
   65536+PEEK(DEC("530F")))
130 PRINT" ": PRINT (INT(II/6))/10:"SECONDS"
140 CLOSE 4
ARARA          47474
+TERE           5272
TERAS          52746
.7 SECONDS
READY.
```

# Ötletsarok

*Rovatvezető:* Radnainé Szendrei Julianna

A gyakorló tanítás során mindenki sok-sok munkát fektet abba, hogy egy-egy témakör tanítását érdekesebbé tegye. Olyan feladatokat keres vagy készít, amelyek segítségével a fogalmak világossá, érthetővé, szemléletessé tehetők. Néha meg is mutatja az ember ezeket a feladatokat munkaközösségi értekezleteken, de túl kis körben terjednek a feladatok ahhoz a szellemi munkához képest, amit kitalálójuk a feladatokba fektetett. Nem is beszélve arról, hogy ugyanakkor az ország számos más helyén tanárok ugyanolyan problémával küzdenek, ugyanolyan kérdéseket igyekeznek megoldani.

Régi vágyunk az, hogy A Matematika Tanítása igazi fóruma legyen az egyéni megoldások terjesztésének. Igen szűk tanári réteg ragad azonban tollat, hogy egy-egy cikket írjon. Ennek sok oka lehet. Kevés az idő. Félünk megmutatkozni talán. Mindenki azt gondolja, hogy csak nagyon jelentős dolgot lehet cikk formájában megjelentetni. Valami „elméleti" kutatás eredményét.

Ha ez a rovat be akarja tölteni a szerepét, akkor „nyúlfarknyi" ötletektől kezdve, egy-egy tanítási folyamat részletes leírásáig minden lehet benne. A cél csak annyi, hogy a már megtalált, bevált „trükkök", felismerések, feladatok, módszerek mindenkihez eljussanak. Hadd találjanak a kezdő tanárok is újabb ötletet, tanácsot a lapban.

Ha már egy-egy írás megjelent bizonyára sokan fogják azt érezni, hogy ők is tudnak ilyet írni, nekik még jobb ötleteik, feladataik vannak. Ragadjanak gyorsan tollat, és írják meg röviden ezeket. Hadd legyen minél több anyaga a szerkesztőnek ahhoz, hogy igazán élő, jól hasznosítható rovatot alakíthasson ki.

Indításként egy „házi" összeállításra vállalkoztunk. Az OPI Matematikai Osztályának iskolában amúgy is tanító munkatársai vállalták az első rész összeállítását. Talán jobban lehet majd ebből látni az elképzelés vázát is.

RADNAINÉ SZENDREI JULIANNA
főmunkatárs
Országos Pedagógiai Intézet

## Paraméter

Két éve első osztályban tanítottam matematikát. A szakközépiskolai osztály összetétele a szokásos volt. Nem a legkiválóbbak jönnek hozzánk. 36 tanuló közül két évismétlő, tanév közben más iskolából vagy másik osztályból átirányított 3 tanuló.

Évek óta sok időt fordítok arra, hogy egy-egy matematikai fogalom kialakulásában minél jobban segítsem a gyerekeket. Néha hamar becsapjuk magunkat, hogy egy egyszerű példán bemutatott fogalomról azt hisszük, hogy a gyerekek már értik, de később heteket tölthetünk más témakörök tanításával csupán azért, mert ez az elsietett fogalomalkotás megbosszulja magát. Újból és újból lerogyadoznak azok a téglák, amelyeket rájuk szeretnénk építeni.

Tipikusan ilyennek találtam a paraméter fogalmát.

Hamar végig lehet „rohanni" rajta első osztályban. Hiszen egyszerű példákban megmutatva a gyerekek maguk is úgy

érzik, hogy értik. Mégis a fogalom megismerésére érdemes hosszabb időt szánni. Később megtérül majd.

Szeretném megmutatni azt, hogy egy véletlen fordulat kapcsán hogyan érezték meg a gyerekek a paraméter hasznos voltát.

A Czapáry-féle feladatlapok egyik feladatával foglalkoztunk. Ennek a feladatlapnak az a célja, hogy a szöveges feladatok egyenlettel történő megoldását tanítsa. A probléma jólismert. Egy apa és a fia közötti életkor különbségének és egy bizonyos évben az életkoruk arányának ismeretében azt kérdezi a feladat, hogy mikor lesz az apa életkora a fiú életkorának kétszerese.

A megoldás menete sok gyerek számára jól érthető volt, hiszen a feladatlap segít a megoldási menet kialakításában. Mégis némi hiányérzetem volt. Ezért azt adtam fel házi feladatnak, hogy mindenki készítsen egy hasonló szöveges feladatot a sajátmaga és egy családtagja adatainak felhasználásával. Aki táblázatot akar használni az adatok alakulásának vizsgálatára, az nyugodtan tegye meg. Mindenki oldja is meg a saját feladatát.

A következő alkalommal egy duplaórát egy ilyen feladattal akartam indítani. Roppant lelkesen jelentkezett éppen az egyik fiú, aki évismétlő volt. Természetesen őt hívtam fel. (Egyébként mindenki igen lelkesen akarta felolvasni a saját feladatát.)

A feladat a következő volt:

Egy dédnagyapa és a dédunoka életkora között 90 év a különbség. Egy éve a dédnagyapa hétszer annyi idős volt, mint a dédunoka. Mikor lesz a dédnagyapa kétszer annyi idős, mint a fiú?

Több szempontból is izgató volt számomra, hogy mi fog történni az osztályban. Maga az alapfeladat megoldására azért voltam kíváncsi, hogy mennyire tudták alkalmazni az előző órai megoldás szerkezetét. Ennél még jobban izgatott azonban, hogy mennyire fogják irreálisnak érezni a kapott eredményt.

A feladatmegoldást táblázattal kezdték:

| | most | egy éve | $t$ év múlva |
|---|---|---|---|
| Dédunoka | $x$ | $x-1$ | $x+t$ |
| Dédi | $x+90$ | $x+89$ | $x+t+90$ |

A következő egyenleteket írták fel:

$$(x+89):(x-1) = 7,$$

$$(x+t+90):(x+t) = 2.$$

Az első egyenletből megkapták, hogy az $x=16$, tehát a fiú most 16 éves, a dédi pedig 106.

Ezzel az adattal akkor a második egyenlet a következő lesz:

$$(106+t):(16+t) = 2.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása: $t=74$, tehát 74 év múlva lesz a dédnagyapa kétszer olyan idős, mint az unoka.

Sokakban azonban azonnal felötlött a gondolat, hogy ez nem nagyon reális, mert akkor a fiú 90 éves lenne, a dédi pedig már 180. Tehát a dolog nem fog valóra

válni. Közben kiderült, hogy a dédi már két éve meghalt. Ezért azon is vitatkoztak, hogy jó-e egyáltalán ez a feladat.

Megállapodtak abban, hogy másképpen kell kérdezni.

Azon gondolkodtak, hogy lehet-e például azt kérdezni, hogy:

A dédnagyapa 1 évvel ezelőtt lett volna hétszer annyi idős, mint a dédunoka. Mikor volt nyolcszor annyi idős, mint a dédunoka?

A feladat adataival ismét felírták az egyenletet és azt kapták eredményül, hogy 22/7 év múlva. Erre többféle reagálás következett. Valaki, aki osztással kiszámította a szám tizedes tört alakját bekiabálta, hogy a kapott eredmény éppen a $\pi$.

Ekkor néhány percig beszéltem arról, hogy sokáig a matematikusok is azt tartották, hogy ez a $\pi$ pontos értéke.

Visszatérve az eredeti feladatra vita kerekedett arról, hogy a kapott „eredmény" elfogadható eredménynek, vagy nem.

Volt aki amellett érvelt, hogy csak egész számokat fogadhatunk el megoldásnak, mert nem mondtuk ki, hogy mondjuk 90 év és 2 hónappal idősebb a dédi, mint a fiú, hanem évekre kerekítettünk.

Mások azt mondták, hogy ez értelmes végeredmény, mert az idő folytonos (!), tehát biztosan volt olyan pillanat, amikor ez az eset fennállt.

Egy gyereket megkértem, hogy próbálja felrajzolni azt az életkor függvényt, amit a gyakorlatban használunk. (Hiszen itt megteremtődött az alkalom az egészrész-függvénnyel való első ismerkedésre.)

Nem rajzolta fel a 0 és 1 közötti részt és az egyes szakaszok végpontjait sem, de a grafikon lépcsős jellegét jól szemléltette. (Mondták, hogy ez az ábra különösen a lányokra jellemző, akik fiatalítani akarják magukat.)

Megállapodás született, hogy mivel az adatokat évekre kerekítve kaptuk, ezért csak egész szám végeredményt fogadunk el, tehát a kapott eredmény nem megoldása a feladatnak.

Felvetették azonban a kérdést, hogy azért milyen életkor-arányok lehetségesek. Lehetett-e 9-szer, 10-szer annyi idős?

Valaki azt mondta, hogy egyet tud fejből is. Amikor 1 éves volt a gyerek, akkor a *dédi 91-szer annyi* idős volt. Erre megszületett rögtön az újabb eredmény, hogy *46-szor annyi* is volt; 92 éves korában, mert akkor a fiú 2 éves volt.

Azt javasolták, hogy készítsünk táblázatot a hányadosokról. Néhányan nem is vártak tovább, azonnal elkezdték a munkát, serényen osztogattak. (Az alapműveletek gyakorlására nagyon jó volt ez a munka, hiszen a gyerekek gyorsan dolgoztak, érdekelte őket a végeredmény. Az sem volt kérdéses, hogy meddig számoljanak, hiszen egy tizedesjegy után kiderült, hogy nem egész számot kaptak.)

| Dédi (d) | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Unoka (u) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $d:u$ | — | 91 | 46 | 31 | ... | | |

Ekkor megszületett a nagy ötlet, hogy jelöljük $a$-val az életkorok arányát, oldjuk meg az egyenletet, mintha az „rendes" szám lenne, és a kapott eredménybe helyettesítsük be aztán $a$ helyébe egymás után a számokat.

Ezt az egyenletet írtuk fel:

$$(106-t):(16-t) = a.$$

(Tehát megjelent a paraméter. Nem mondtam azonban nekik erről semmit.) Megoldásul azt kapták, hogy

$$\frac{106-16a}{1-a} = t.$$

Elkészítettük a táblázatot, a munkát felosztva a padsorok között. Javasolták, hogy csak 2 és 46 közötti értékeket próbáljunk ki, mert 46 és 91 közötti szám nem lehet az eredmény, 1 pedig azért nem, mert akkor 0-val kellene osztani.

A táblázat így alakult:

| $a$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-a$ | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 | −6 | −7 | −8 | −9 | −10 | |
| $t$ | −74 | −29 | −14 | −6,5 | −2 | 1 | 3,14 | ... | | | |

egészen 46-ig. A negatív számokat először többen nem akarták elfogadni, de mások mondták, hogy azok is jók, mert az arányról már tudjuk, hogy lehet 2 is, 74 év múlva, ami itt azt jelenti, hogy −74 évvel ezelőtt.

A kapott megoldások tehát: az arány lehet 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 16, 19, 31, 46 és 91. A többi esetben az eredmény nem egész szám.

Néhányan azonban nagyon elégedetlenek voltak ezzel a hosszú megoldással. Azt mondták, hogy hihetetlen, hogy ne legyen ennek a nagyon egyszerű kérdésnek egy rövidebb megoldása.

A kérlelésnek nem tudtam ellenállni és megmutattam, hogyan lehet átalakítani a kifejezést — bár még nem terveztem:

$$t = \frac{106-16a}{1-a} = \frac{90+16-16a}{1-a} = \frac{90+16(1-a)}{1-a} = \frac{90}{1-a} + 16.$$

Tehát $t$ akkor lesz egész szám, ha $(1-a)$ lehetséges értékei: 1, −1, 2, −2, 3, −3, 5, −5, 6, −6, 9, −9, 10, −10, 15, −15, 18, −18, 30, −30, 45, −45, 90, −90.

Ebből azt kapjuk, hogy a lehetséges értékei:

2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 16, 19, 31, 46, 91; nem lehet azonban az arány negatív szám.

Ezzel a rövid megoldással mindenki megvizsgálta a saját feladatát is, hogy annak hányféle megoldása lehetséges.

Roppant érdekes volt, ahogy $t$ értékének egyes eseteit vizsgálták. Különösen az jelentett nagy fordulatot, amikor rájöttek, hogy $t$ értéke csak akkor lehet 16-nál több, ha pozitív számot adunk hozzá; 16-nál kevesebb, ha $\frac{90}{1-a}$ értéke negatív szám. Felismerték, hogy ez viszont csak akkor lehet, ha $a$ 1-nél nagyobb szám. Azt is megnéztük, hogy $a=1$ értéke, amikor a tört nevezője 0 lenne, olyan helyzetre vonatkozik, ami a szöveg értelmében sohasem valósulhat meg. Hiszen ez azt jelentené, hogy mikor lesz (volt) a dédunoka és a dédnagyapa egyidős.

Úgy éreztem, hogy ennek a kifejezésnek a vizsgálata, aminek most számukra igen konkrét jelentése volt, sokat segített bennünket ahhoz, hogy később hasonló vizsgálatokat végezzünk racionális törtfüggvények növekedésével kapcsolatban.

A tanév során további feladatokat oldottunk meg hasonló ötlettel. A paramétert arra használtuk, hogy egyedi feladatokat általánosítsunk, megkeressük az összes megoldást. Ezek után következhettek olyan típusú feladatok, ahol már egy-egy feltételnek eleget tevő megoldáshoz kerestük vissza a lehetséges paraméterértékeket.

GÓDORNÉ SERGYÁN STEFÁNIA
középiskolai tanár
Zalaegerszeg, Ságvári Endre Gimnázium

# Lényeges a szóbeliség

(Gondolatok egy megyei szintű általános iskolás verseny szóbeli döntője kapcsán)

1988. júniusában zsüritag voltam a Zala megyei TIT által általános iskolásoknak szervezett „levelezéses" matematikaverseny döntőjében. Az érdeklődő gyerekek évközben feladatlapokat kaptak, amelyek megoldását beküldték és minden évfolyamról a legjobb 10 megoldó meghívást kapott a megyei döntőre, ahol először egy írásbeli dolgozatot írtak, majd ezt követte a szóbeli döntő. Ez utóbbira én állítottam össze a feladatokat. Két zsüri működött. Az egyik az 5—6., a másik a 7—8. osztályosok felkészültségét mérte le. Az egyes évfolyamok versenyzői egyszerre mentek be az illető bizottsághoz és egyénileg, a többiek jelenlétében oldották meg kis gondolkodási idő után a táblánál az általuk kihúzott feladatot. Közben a feladatmegoldást követően a többiek plusz pontért kiegészítést tehettek, így végig érdekeltek voltak abban, hogy figyeljenek.

Az 5—6., illetve 7—8. osztályosok ugyanazokat a feladatokat kapták. Külön élményt jelentett számomra, hogy ugyanazt a feladatot két különböző évfolyamú tanuló oldotta meg. Lényeges különbséget lehetett megállapítani az 1 évvel idősebbek javára a precíz megfogalmazást és szabatos indoklást illetően. Öröm volt hallgatni az alsóbb évfolyamosok logikus fejtegetéseit, ötletes megoldásait és a 8. osztályosok frappáns, lényegretörő elemzéseit.

Ilyen szóbeli szereplésre több lehetőséget kellene adnunk a gyerekeknek. Nemcsak a jóknak, hanem mindenkinek. Tapasztalatom szerint középiskolában még kevesebb lehetőség nyílik erre. Az érettségi vizsga csak írásbeli részből áll és a számonkérés szinte teljesen leszűkül a feladatlapokra, témazáró dolgozatokra.

Rendszeresen szóban is feleltetem a gyerekeket elméleti anyagból és egy-egy feladatból. Vannak olyan osztályaim, ahol az előző évben nem én tanítottam, és nagyon megilletődnek, amikor feleltetésre kerül sor, mondván, hogy ők eddig szóban sohasem feleltek. Pedig erre nagy szükség van. Megfigyeltem, hogy pl. a gimnázium I. osztályába járó tanulók közül még a jobbak sem tudják szabatosan kifejezni magukat. Sokan jóra gondolnak, de nem tudják azt elmondani, amire gondolnak. A definíciókat sem adják vissza precízen, pedig azt csak meg kell tanulni.

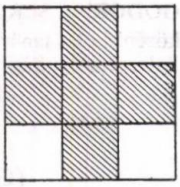
Véleményem szerint — annak ellenére, hogy jelenleg a számonkérésben az írásbeliség dominál (témazáró dolgozatok, érettségi, ill. felvételi dolgozat) — *nagy hangsúlyt kell fektetni a szóbeliségre.* Lehetőséget kell adnunk a gyerekeknek szóbeli szerepléseikre, hogy kifejezőkészségüket közös erővel javíthassuk, csiszolhassuk.

Az említett TIT versenyen a következő feladatok szerepeltek a szóbeli döntőben:

*5—6. osztály*

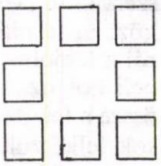
**1.** *a)* Egy osztályban 8 gyereknek volt számtanból ötöse. 5-nek sikerült számtanból és magyarból is ötöst kapnia. 14-nek a 2 tárgy közül legalább az egyikből ötöse volt. Hány ötös volt magyarból?
(Mo.: Csak számtanból 3-nak volt ötöse, csak magyarból 6-nak. Így magyarból összesen 11-nek.)

*b)* Vegyél el 8 db gyufaszálat úgy, hogy 5 zárt négyzet maradjon az ábrán!



2. *a)* Két kosárban összesen 100 barack van. Az egyik kosár harmadrésze annyi, mint a másik kosár fele. Melyik kosárban hány barack lehet?
(Mo.: 60 és 40.)

*b)* Egy táborban 8 faház volt az ábra szerinti elrendezésben. Helyezz el 40 úttörőt a házakban úgy, hogy mindegyik házban lakjon valaki és a tábor mindegyik oldala mentén 11 fő lakjon a 3 házban összesen.
Próbálj meg 38 úttörőt is elhelyezni az előbbi feltételek szerint!



| | | |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 1 |
| 9 | | 9 |
| 1 | 9 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 2 |
| 8 | | 8 |
| 2 | 8 | 1 |

3. *a)* Jobb zsebemben 6 Ft-tal több volt, mint a bal zsebemben. A jobb zsebemben levő összeg felét áttettem a bal zsebembe, így ott másfélszer annyi lett, mint amennyi a jobb zsebemben maradt. Mennyi pénz volt eredetileg a 2 zsebemben külön-külön?
(Mo.: a jobb zsebben 8 Ft, a bal zsebben 2 Ft.)

*b)* Egy baktériumtenyészet minden nap a kétszeresére szaporodik. 30 nap alatt teljesen ellepi a poharat. Hány nap alatt lepi el a pohár felét?
(Mo.: 29.)

4. *a)* Egy mérleg egyik serpenyőjében egy tábla csoki van. A másikban egy ugyanilyen csoki 3/4 része és 75 g. A mérleg ekkor egyensúlyban van. Hány gramm egy tábla csoki?
(Mo.: A hiányzó negyed csoki 75 g, ezért egy tábla csoki 300 g.)

*b)* Írd le a számokat 1-től 20-ig egymás mellé. Törölj le belőlük 10 db számjegyet úgy, hogy a megmaradt számjegyeket összetolva a lehető legnagyobb számot kapd! (A jegyeket felcserélni nem szabad!)
(Mo.: .....91..11213141516171819120)

5. *a)* Egy gyerek úgy osztozott bizonyos számú almán, hogy Péter kapta az összes alma felét meg még kettőt. Pista kapta a megmaradt almák felét és még kettőt. Jóska az ezután visszamaradt almák felét és még kettőt kapott. Így egy alma maradt elosztatlanul. Hány almája volt a 3 fiúnak összesen?
(Mo.: Visszafelé okoskodva: $\{[(1+2)\cdot 2+2]\cdot 2+2\}\cdot 2=36$.
Péter: 20, Pista: 10, Jóska: 5.)

*b)* Mikor mutat az óra többször pontos időt naponta? Ha állandóan 5 percet siet (vagyis 5 perccel többet mutat a pontos időnél), vagy ha áll?
(Mo.: Ha áll, mert az naponta 2-szer mutatja a pontos időt, a másik pedig sohasem!)

**6.** *a)* Három ládában egyenlő mennyiségű narancs volt. Amikor mindhárom ládából kivettek 8—8 narancsot, akkor pont annyi narancs maradt a 3 ládában összesen, mint amennyi eredetileg volt 1 ládában. Hány narancs volt eredetileg 1-1 ládában?
(Mo.: A 8-8 narancs kivétele után mindegyik ládában az eredeti mennyiség 1/3 része maradt és a kivett 8 db 2/3 rész. Ezért 1-1 ládában 12 db volt.)

*b)* Egy órához 3 féle tokot, 4 különböző színű számlapot és 2-féle típusú óramutatót használnak. Hány olyan óratípus készíthető, amelyekben a fenti alkatrészek valamelyike különbözik?
(Mo.: $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ eset van.)

**7.** *a)* Osszunk el 92 diót 3 pajtás között úgy, hogy az első dióinak a száma egyenlő legyen a 2. pajtás dióinak 2/3 részével és a 3. pajtás dióinak a 3/4-ével!
(Mo.: 24, 36, 32.)

*b)* Egy 10 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Összesen hány kézfogás történt?
(Mo.: $10 \cdot 9 : 2 = 45$.)

**8.** *a)* Egy turistát 2 juhász lát vendégül a Hortobágyon. Az egyik 5, a másik 3 túrógombócot ad a közös vacsorához, amelyet hármasban fogyasztanak el. A turista 8 Ft-ot fizet a túrógombócokból ráeső részért. Hogyan osztozzanak igazságosan a juhászok a 8 Ft-on?
(Mo.: Ha a 8 db gombócot hárman fogyasztják, akkor mindegyikük 8/3 gombócot eszik meg; a turista is. Az 5 gombócot adó juhásztól a turista $\left(\frac{15}{3} - \frac{8}{3}\right) : \frac{7}{3}$-ot kap, a másikból csak $\frac{1}{3}$-ot. Ezért az adott 8 Ft-ból az 1. juhász 7-et, a 2. csak 1-et kap!)

*b)* Képzelj magad elé egy 4 dm élhosszúságú, feketére festett kockát!
*(a)* Hány vágással lehet 1 dm élhosszúságú kockákra szétvágni?
*(b)* Hány ilyen kockát kapunk?
*(c)* Hány kockának lesz 4 festett oldala?

**9.** *a)* Egy literes üveg 4/5 részéig volt megtöltve terpentinnel. Az üveget nyitva felejtették. Amikor észrevették, már elpárolgott a terpentin 3/4 része. Mennyi volt eredetileg az üvegben? Mennyi maradt az üvegben?
(Mo.: 200 $cm^3$.)

*b)* Képzelj magad elé egy 4 dm élhosszúságú, feketére festett kockát! 1 dm élhosszúságú kockára daraboljuk.
*(a)* Hány kockának lesz 3 festett oldala?
*(b)* Hány kockának lesz 2 festett oldala?
*c)* Hány kockának lesz 1 festett oldala?
*d)* Hány kockának lesz 0 festett oldala?
(Mo.: 8, 24, 24, 8.)

**10.** *a)* Egy dobozban 5 piros, 5 kék, 3 zöld és 7 sárga egyforma méretű cukorka van. Hány cukrot kell találomra kihúzni, hogy biztosan legyen köztük
*(a)* 2 azonos színű,
*(b)* 2 különböző színű,
*(c)* mindegyik színből?
(Mo.: 5, 8, 18.)

*b)* Hány különböző lyukasztás lehetséges az autóbuszjegyen, ha a készülék 2 számot lyukaszt ki?
(Mo.: $9 \cdot 8 : 2 = 36$.)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

**11.** *a)* Egy számlán ez áll: 237 · x1x Ft xx fill = 7xxx0 Ft 65 fill. Az x-ek helyén álló számjegyek olvashatatlanok. Határozd meg őket!
(Mo.: 312,45 Ft az egységár.)

*b)* Az I., II. és III. dobozok mindegyikébe 1—1 golyót helyeztek el. Az egyikbe zöldet, a másikba barnát, a harmadikba pedig lilát. A 3 állítás közül csak 1 igaz, a másik kettő hamis.
1. Az I-ben barna golyó van.
2. A lila golyó nincs az I-ben.
3. A zöld golyó nem a III.-ban van.
Melyik golyó melyik dobozban van?
(Mo.: Ha az 1. vagy a 2. lenne az igaz, akkor ellentmondáshoz jutnánk, ezért a 3. állítás lehet csak igaz. Tehát az I-ben lila, a II-ben zöld, a III-ban barna golyó van.)

**12.** *a)* Hányféleképpen tudod kiolvasni a KENGURU szót?

K E N G U
E N G U R
N G U R U

(Mo.: 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5
1 3 6 10 15-*félén*)

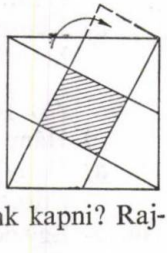
*b)* Folytasd: *(a)* 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
*(b)* 1, 2, 3, 5, 7, 11, ...
(Mo.: *(a)* minden szám az előtte levő 2 összege
*(b)* (+1, +1, +2, +2, +4, +4, +8, +8, ...-at adunk mindig az egyes számokhoz.)

*7—8. osztály*

**1.** *a)* Egy áru árát 20%-kal emelték, majd ezt követően 20%-kal csökkentették. Változott-e az ára?
(Mo.: $1{,}2y \cdot 0{,}8 = 0{,}96x$, tehát 4%-kal csökkent.)

*b)* Egy zacskóban 7 fehér, 5 sárga és 3 kék golyó van. Legalább mennyit kell kihúzni ahhoz, hogy a golyók között biztosan legyen:
*(a)* fehér, *(b)* 2 sárga (a kihúzott golyókat nem tesszük vissza).
(Mo.: *(a)* 9, *(b)* 12.)

**2.** *a)* Egy téglalap egyik oldalát 10%-kal növelték, a másikat 10%-kal csökkentették. Változott-e a területe?
(Mo.: $1{,}1a \cdot 0{,}9b = 0{,}99ab$ tehát 1%-kal csökkent.)



*b)* Hányad része a bevonalkázott terület az eredeti négyzet területének? (Mo.: ötöd része.)

**3.** *a)* Hány egybevágó kockát ragasszunk oszloppá, ha az eredeti kocka felszínénél 3-szor nagyobb felszínű testet szeretnénk kapni? Rajzold le a kapott testet!
(Mo.: 4 db-ot.)

*b)* Balázsnak annyi nővére van, mint ahány fivére. Nővéreinek csak feleannyi lánytestvérük van, mint fiútestvérük. Hány lány és hány fiú van ebben a családban?
(Mo.: 3 nővére és 3 fivére van, így összesen 4 fiú és 3 lány.)

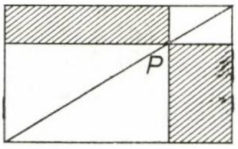
**4.** *a)* Egy vadásztól 360 m-re kilép az erdőből egy vadkan. A vadász azonnal lő és talál. A vad azonnal összeesik, a kutya pedig felugrik a helyéről és a vadásszal együtt megindul a lelőtt vad felé. A kutya gyorsabban szalad a gazdá-

jánál és amint eléri a vadkant, azonnal visszafordul és fut a közelgő gazdához, majd ismét visszaszalad a vadhoz, onnan megint a gazdájához stb., amíg a vadász a zsákmányhoz nem ér. Hány métert futott a kutya, ha másodpercenként 4 m-t, a vadász pedig 1,5 m-t tett meg?
(Mo.: A vadász 240 s alatt tette meg a 360 m-t, a kutya ezalatt 960 m-t tett meg.)

*b)* Folytasd: *(a)* 1, 1, 3, 6, 10, 15, ...
*(b)* 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
(Mo.: *(a)* +1, +2, +3, +4, +5 stb. adunk az előző számhoz.
*(b)* a 3.-tól kezdve minden szám az előtte levő 2 összege)

**5.** *a)* Egy 2 serpenyős mérlegen szét kell mérnünk egy zacskóban levő 9 kg lencsét 2 kg-os és 7 kg-os részre. 1 db 50 g-os és 1 db 100 g-os súlyunk van. Minél kevesebb méréssel mérd szét!
(Mo.: 1. Osszuk a lencsét 2 egyenlő részre (ehhez nem kell súly.)
2. Az egyik csomót ismét osszuk 2 egyenlő részre. Így 1—1 rész súlya 2,25 kg lesz.
3. Valamelyik 2,25 kg súlyú részből vegyünk ki 250 g-ot. Ehhez 2 súly kell. A többit összeönthetjük.)

*b)* Az ábra szerinti téglalap átlójának tetszőleges P pontján át párhuzamosokat húztunk az oldalakkal. Vizsgáld meg, hogy a bevonalkázott téglalapok közül melyiknek nagyobb a területe?

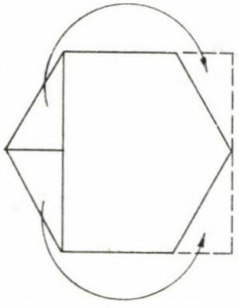



**6.** *a)* 400 Ft-ért 36 kg almát és 32 kg körtét vásároltak. Mennyibe került 1 kg alma, ha a körte kg-ja 2-szer olyan drága, mint az almáé?
(Mo.: Az alma 4 Ft, a körte 8 Ft.)

*b)* 9 pénzérme közül egy hamis, könnyebb a többinél. Hogyan tudjuk egy kétkarú mérleg segítségével legfeljebb 2 méréssel kiválasztani a hamis pénzérmét?
(Mo.: 3—3 érmét teszünk fel. Ha nincs egyensúly, a hamis a könnyebb csopotban van. Így a 3 közül megint 1-et, 1-et teszünk fel.)

**7.** *a)* Hová mentek 20-an, András? — „Nem vagyunk ki 20-an pajtás, de ha még egyszer és még félszer annyian volnánk, akkor volnánk 20-an, pajtás." Hányan voltak?
(Mo.: Most 20:2,5=8-an vannak.)

*b)* Egy szabályos hatszöget darabolj át minél kevesebb vágással téglalappá!
(Mo.:



**8.** *a)* Hány egyenes húzható 30 ponton át, ha közülük semelyik 3 nem esik egy egyenesre?
(Mo.: $30 \cdot 29 : 2 = 435$.)

*b)* Ébresztőórám 4 percet késik óránként. 3 és fél órával ezelőtt pontosra állítottam. Most 12 óra van. Hány perc múlva mutat az órám 12 órát?
(Mo.: Nagymutatója csak 56 perces utat jár be 60 perc alatt. Tehát nem 14, hanem 15 perc múlva fogja mutatni a 12-t.)

**9.** Egy mérleg egyik serpenyőjében egy tábla csoki van. A másikban egy ugyanolyan csoki 3/4 része és még 3/4 kg súly. A mérleg egyensúlyban van. Milyen súlyú a csoki?
(Mo.: 1/4 tábla csoki 3/4 kg, így az egész tábla csoki 3 kg súlyú.)

*b)* Egy négyszögről András azt állítja hogy négyzet. Balázs azt, hogy paralelogramma, Csilla pedig azt, hogy trapéz. Dóra szerint deltoid. A tanár megállapítja, hogy az elhangzott 4 állítás közül 3 igaz, egy pedig hamis. Mit mondhatunk a négyszögről?
(Mo.: Csak akkor lehet éppen 3 igaz állítás, ha Andrásé a hamis. Tehát olyan rombusz, melynek szögei nem derékszögek, mert ennek szemközti oldalai párhuzamosak. Tehát nem négyzet, és 2—2 szemközti oldala is egyenlő.)

**10.** *a)* Hogyan tudnád eldönteni, hogy egy tetszőleges számrendszerben felírt szám osztható-e
*(a)* a számrendszer alapszámával,
*(b)* 2-vel,
*(c)* az alapnál 1-gyel kisebb számmal?
(Mo.: *(a)* Ha utolsó jegye 0,
*(b)* páros alapszámnál az utolsó jegye páros, páratlannál ha a számjegyek összege páros,
*(c)* ha a számjegyek összege osztható az adott számmal.)

*b)* Egy kikötőben 1988. jan. 1-én együtt volt 4 hajó. Az 1. pontosan 4 hetenként, a 2. 8 hetenként, a 3. 12 hetenként, a 4. 16 hetenként fordul meg a kikötőben. Hány hét múlva találkoznak legközelebb ebben a kikötőben?
(Mo.: 48.)

**11.** *a)* Egy iskolában 67 tanuló közül 47 a turista szakkör, 35 a matematika szakkör és 23 mindkét szakkör tagja. Hány olyan tanuló van köztük, aki egyik szakkörnek sem tagja.
(Mo.: mivel $24+12+23=59$. $67-59=8$, tehát 8.)

*b)* Mekkorák annak a rombusznak a szögei, amelynek egyik csúcsából húzott magassága felezi a szemközti oldalt?
(Mo.: 60° és 120°.)

**12.** *a)* Helyettesítsd a betűket számjegyekkel:
(A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.)

$$\begin{array}{r} \text{H O L D} \\ +\ \text{F A K O} \\ \hline \text{F A L O N} \end{array}$$

(Mo.:
$$\begin{array}{r} 9\,567 \\ +1\,085 \\ \hline 10\,652 \end{array}$$
)

*b)* Hogyan lehet egy háromszöget egyetlen vágással 2 egyenlő területű háromszögre bontani?
(Mo.: Bármelyik súlyvonalával.)

BARTA LÁSZLÓ
általános iskolai tanár
Nógrádmegyer

# Néhány gondolat a számítógépes grafikáról

Az ábrák, ponthalmazok, függvények ábrázolásánál az elektronikus számítógépek nagy segítségül szolgálnak. Vagy úgy, hogy viszonylag nagy pontossággal, vagy mennyiségben a rendelkezésre bocsátja az értelmezési tartomány és értékkészlet megfelelő elemeit, vagy ezen összetartozó értékekhez egy ponthalmazt rendelve, a grafikont rajzolja meg.

Amivel szemléletünk része a látványszerű, szemléletes gondolatvilág, azért jó az, ha ezt egy-egy eszköz gyorsan elvégzi részünkre. Erre jó alkalmat adnak a ma létező számítógépek közül a mindenki számára könnyebben hozzáférhető személyi számítógépek.

Fontos tudnivalónak kellene lefogadni olyasfajta törekvést, hogy a számítógép tényleges lehetőségét, a mindezt igazán jobban kielégítő tevékenységét aknázzuk ki, mint a gép divattartalmát. Hisz egy egyenest, kört, parabolát, egyszerű szögfüggvény grafikonját kényelmesebben, gyorsabban, pontosabban ábrázolható módjánál, a papír—ceruza vagy a kréta—tábla lehetőségnél különbet — az oktatás számára — senki sem talált ki. A felesleges látványosság néha zavarhatja a tényleges gondolatra való összpontosítást. A jó öreg eszközöket is az azokat megillető helyen érdemes rehabilitálni.

Nekünk a számítógépes grafika ott legyen fontos, amikor rövid idő alatt egy olyan ponthalmaz alakjáról akarunk képet kapni, amikor pallérozott matematikai apparátusba egyelőre nemigen tudjuk foglalni gondolatainkat. Ilyenkor megteszi egy matematikai szempontból nem túlkultúrált elektronikus „kontár" is. A továbbiakban ezekre látunk példákat, a PRIMO személyi számítógépre, BASIC-nyelven.

**1.** A Matematika Tanítás 1986. februári számában a 24. oldal 1121-es feladata is feldolgozható ilyen szemléltető szempontból. A következő módon járhatunk el (a mellékelt ábra alapján):

— legyen $AB = 150$ pontegység,

$\alpha = 50°$,

$\beta = 60°$,

$BC = 70$ pontegység,

$AD = 100$ pontegység,

— a képernyő a koordináta-rendszer első negyedét mutatja, a gép által vezérelve. SET utasításra beírjuk az $A$, $B$, $C$, $D$ csúcsokat. Célszerű, ha $A(0; 0)$, $B(150; 0)$.

— a ponthalmaz pontjait írja le egy $f(x; y)$ függvény, ahol $y$-t radiánokban adjuk meg.

— Az ábrában $SZ \| XA \| YK$, az $SZKY$ paralelogramma átlófelezési pontjait a SET $(AE, f(x; y))$ írja le egy egymásba ágyazott FOR ciklussal, az $x$ és $y$ ciklusváltozókkal. A pont kigyújtási feltétele az IF THEN kapcsolatra:

$0 < b \leqq 70$

$0° \leqq y \leqq 120°$ (szög radiánokban).

— Az $x$ ciklusváltozó FOR X=Ø TO 15Ø, az a $y$-nak megfelelőére a FOR I=Ø TO 12Ø.

Itt csak a problémamegoldásnak a vázlata van előttünk. Ha az olvasó érdekesnek tartja, akkor részletesen is kidolgozhatja. Ez esetben bizonyára érdekes ábrát fog kapni, a számítógép segít képet alkotni a pontok halmazáról.

**2.** Most ismertetésre kerül egy szinte bármilyen függvényt ábrázoló program. Röviden ismertetem a feladat elemzését is. Kiindulunk abból, hogy a koordináta-rendszer $x$ tengelyét az origótól felosztjuk balra és jobbra. Bevezetünk egy $S$ változót, amelyre a gép előállítja az $S=0$ kezdőfeltétel mellett az $S=S+1$ természetes számokat. Egy $H>0$ — annál jobb minél nagyobb — segítségével előállítjuk az $x$ tengely felosztását, így:

$$x = S/H$$

$$Y = -1 * H$$

Kiszámítjuk a függvény értékét: $V(x)$-et, $W(Y)$-t. Elvégezzük a koordináta-rendszer transzformációját, ezzel a vektoreltolással:

$$V(127; 95).$$

Ezek után kiíratjuk azokat a pontokat, amelyeket a PRIMO számítógép a 256× 192-es képernyőn meg tud jeleníteni. Alkalmaztam egy $K$ számot, amelynek a segítségével közelebbre, „előrehozhatjuk" a grafikont, vagy pedig kicsi $K$ esetén „távolabbról" látjuk. A program az $x$ tengelyt vizsgálja a számítógép legnagyobb és legkisebb számtartomány határa között. Íme a program:

```
100 REM * Függvényábrázolás *
150 INPUT "A nagyítás értéke"; K
160 IF K<=0 THEN 150
170 INPUT "Rajzfinomítás"; H: IF H<=0 THEN 170
180 CLS
182 REM * A vízszintes tengely x, a függőleges y *
190 KI=0
200 KI=KI+1
240 IF KI<=191 THEN SET (127, KI): GOTO 200
250 HI=0
260 HI=HI+1
270 IF HI<=255 THEN SET (HI, 95): GOTO 260
390 S=0
400 S=S+1
500 X=S/H
510 REM * A K-szoros hasonlóság *
520 XX=K*X
530 REM * Az 531—559-ig beírni a függvényt vagy annak feltételeit! *
560 VX=V*K
660 Y=-1*X
680 Y2=K*Y
690 REM * A 691—719-ig beírni a függvényt vagy annak feltételeit! *
720 WX=W*K
730 REM * Eltolás a v(127; 95) vektorral *
800 X1=XX+127: Y1=VX+95
940 IF X1>=0 AND X1<=255 AND Y1<=191 AND Y1>=0 THEN SET
    (X1, Y1)
```

```
950 REM*Eltolás a v(127; 95) vektorral*
1000 XY=Y2+127: YY=WX+95
1100 IF XY>=0 AND XY<=255 AND YY<=191 AND YY>=0 THEN SET
     (XY, YY)
1200 GOTO 400
```

Hogyan alkalmazzuk a programot? Először „krétatábla" ábrázolási eseteket lássunk!

*a)* Ábrázoljuk az $f(x)=x^2-10$ függvényt!
Begépeljük a következőket:

```
540 V=X*X-10
700 W=Y*Y-10
```

*b)* Ábrázoljuk az $f(x)=\sin(3x)$ függvényt!
Begépeljük a következőket:

```
540 V=sin (3*x)
700 W=sin (3*x)
```

Egy „összenyomott" sinusgörbét kapunk.

*c)* Ábrázoljuk az $f(x)=\ln x$ függvényt!
Begépeljük a következőket:

```
(*) 540 V=LOG (x)
```

Ha most `700 W=LOG (Y)`-t beírjuk, azért hibát fog jelezni a gép, mivel ez esetben $W$ komplex szám. Akkor vagy csak a ()-os sort, vagy az

```
540 V=LOG (x)
700 IF Y<=0 THEN 1200
702 W=LOG (Y)
```

sorokat írjuk be.

Nézzünk olyan eseteket, amikor a nem éppen formában levő tanárnak gond lehet az ábrázolás.

*a)* Ábrázoljuk az $y=\frac{1}{x^2-1}$ függvényt!
Begépeljük a következőket:

```
540 IF X=1 THEN 690
545 V=1/(X*X-1)
700 IF Y=-1 THEN 1200
715 W=1/(Y*Y-1)
```

*b)* Ábrázoljuk az $f(x)=\text{arc}\sin x$ függvényt!
Begépeljük a következőket:

```
540 IF X>=1 THEN STOP
559 V=ATN (X/SQR (1-X*X))
700 IF Y<=-1 THEN STOP
719 W=ATN (Y/SQR (1-Y*Y))
```

Természetesen ez a program is rendelkezik matematikai elvi hiányosságokkal. Például az $x=0$ helyen nincsenek definiálva a függvények. A program a matematika elvei szerint nem veszi fel sohasem a nullát, de gépi tevékenysége szerint igen. Különösen akkor, ha $H$ értéke viszonylag nagyon nagy szám. Ez esetben, ha a 0 helyen nincs a függvény definiálva, akkor hibajelzést is adhat. Ezt figyelembe vettem ezeknél a függvényeknél:

*c)* Ábrázoljuk az $y(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ függvényt!

Begépeljük: V=x*sin (1/x)
W=Y*sin (1/Y) a megfelelő sorokba és

K=1ØØ; H=1ØØØ-t betáplálni. A futás kissé lassú, de szép. Ugyanez kipróbálható az $y=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$-szel, ha K=1ØØ és H=1ØØØ, az $y=\frac{1}{x}\sin(10x)$, ha K=1Ø és H=1ØØ.

Mivel az említett 1121-es feladatot csak speciális esetre tudtam megoldani, ezért a számítógépes elemzését csupán problémafelvetésnek szántam. Az imént említettek megfelelő alkalmaztatással természetesen más számítógépre is átírhatók.

---

**Imrecze Zoltánné:** *Aki mer, az nyer!*

A könyv azoknak a tapasztalatoknak az eredménye, amelyeket felmérések során, de legfőképpen az „Aki mer, az nyer!" (ma már Körmönfontoló) című Tv-vetélkedősorozat folyamán szereztünk. A versenyfeladatokból és azokon kívül, azokhoz hasonló típusú feladatokból állítottuk össze a gyűjteményt. Néhol megjegyzést fűztünk olyan feladatokhoz, amelyek megoldásában a versenyzők nem remekeltek. Próbáltuk ennek okát is megfejteni — írja a könyv előszavában többek között a szerző (R.sz.: 81 353).

**Radnainé Szendrei Julianna:** *Szakközépiskolai versenyfeladatok mindenkinek*

A szakközépiskolai versenyek matematikafeladatainak szerzője az előző évi versenyek feladatainak megoldásait a szokásos feladatgyűjtemények megoldásainál lényegesen részletesebben dolgozza ki. Néhány feladatnak több megoldása is megtalálható a könyvben. Ezzel az egyéni felkészülést, tanulást segíti. Ajánlható nem csak szakközépiskoláknak, hanem mindenkinek, aki szeretne jobb feladatmegoldó lenni. (R.sz. 29 288)